கணிதவியல்

மேல் நிலை – இரண்டாம் ஆண்டு

தொகுதி – II

பாடநூல் மேம்பாட்டுக் குழுவின் பரிந்துரையின் அடிப்படையில் திருத்தப்பட்டது.

தீண்டாமை ஒரு பாவச்செயல்
தீண்டாமை ஒரு பெருங்குற்றம்
தீண்டாமை மனிதத்தன்மையற்ற செயல்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் கழகம்
கல்லூரிச்சாலை, சென்னை–600 006

முதற் பதிப்பு–2005
திருத்திய பதிப்பு–2007

நூலாசிரியர் மற்றும் குழுத்தலைவர்

முனைவர் **K. ஸ்ரீனிவாசன்**
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை – 600 005

நூலாசிரியர்கள்

முனைவர் E. **சந்திரசேகரன்**
முதுநிலை கணித விரிவுரையாளர்
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை – 600 005

முனைவர் **ஃபெல்பின் C. கென்னடி**
முதுநிலை கணித விரிவுரையாளர்
ஸ்டெல்லா மாரீஸ் கல்லூரி, சென்னை–600 006

திரு **R. சுவாமிநாதன்**
முதல்வர், அழகப்பா மெட்ரிகுலேஷன்
மேனிலைப் பள்ளி, காரைக்குடி – 630 003

திரு. **A.V. பாபு கிறிஸ்டோபர்**
முதுகலை கணிதப்பாட ஆசிரியர்
புனித சூசையப்பர் மேல்நிலைப் பள்ளி
செங்கல்பட்டு – 603 002

திரு **S. பன்னீர்செல்வம்**
முதுகலை கணிதப்பாட ஆசிரியர்
அரசு மேல்நிலைப்பள்ளி, அரும்பாக்கம்,
சென்னை–600 106.

முனைவர் **C. செல்வராஜ்**
முதுநிலை கணித விரிவுரையாளர்
உ.நா. அரசுக் கல்லூரி, பொன்னேரி – 601 204

முனைவர் **தாமஸ் ரோஸி**
முதுநிலை கணித விரிவுரையாளர்
சென்னை கிருத்துவக் கல்லூரி,
தாம்பரம், சென்னை–600 059.

திருமதி **R. ஜானகி**
முதுகலை கணிதப் பாட ஆசிரியை
இராணி மெய்யம்மை பெண்கள்
மேல்நிலைப் பள்ளி, இராசா அண்ணாமலைபுரம்,
சென்னை–600 028.

திருமதி **K.G. புஷ்பவல்லி**
முதுகலை கணிதப்பாட ஆசிரியை
சீமாட்டி சிவஸ்வாமி அய்யர் பெண்கள்
மேல்நிலைப்பள்ளி, மயிலாப்பூர்,
சென்னை–600 004.

நூலாசிரியர் மற்றும் மேலாய்வாளர்

முனைவர் **A. ரகீம் பாட்சா**
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை – 600 005

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர் **M. சந்திரசேகர்**
உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
அண்ணா பல்கலைக்கழகம், சென்னை – 600 025

முனைவர் (திருமதி) **N. செல்வி**
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
A.D.M. பெண்கள் கல்லூரி, நாகப்பட்டிணம்

திரு. **K. தங்கவேலு**
முதுநிலை கணித விரிவுரையாளர்
பச்சையப்பன் கல்லூரி, சென்னை–600 030

விலை : ரூ.

பாடங்கள் தயாரிப்பு : தமிழ்நாடு அரசுக்காக
பள்ளிக்கல்வி இயக்ககம், தமிழ்நாடு.

இந்நூல் 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

பொருளடக்கம்

5. வகை நுண்கணிதம் : பயன்பாடுகள் - I

(DIFFERENTIAL CALCULUS : APPLICATIONS - I)

5.1 அறிமுகம் :

மேல்நிலை முதலாம் ஆண்டில் நாம் வகை நுண்கணிதத்தின் அறிமுறைக்குரிய நுணுக்கங்களையும், வகைகெழுப்படுத்துவதற்கான பல செய்முறைகளையும் பார்த்தோம். மேலும் முதல் வரிசை, இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுக்களின் வடிவக் கணிதம் மற்றும் இயக்க ரீதியான விவரங்களும் விளக்கப்பட்டன. இப்போது வகை நுண்கணிதத்தின் சில செயல்முறைப் பயன்பாடுகளைப் பற்றி படிக்கலாம்.

நாம் பின்வரும் பிரிவுகளில் பயன்பாடுகளுடன் தொடர்புடைய கணக்குகளைப் பற்றி பார்க்கலாம். (i) சமதள வடிவியல், (ii) மெய் சார்பியல், (iii) உகமம் (பெருமம், சிறுமம்) காணல் கணக்குகள் மற்றும் தோராயமாக்கல் கணக்குகள்.

5.2 வீத அளவையில் வகையீடு (Derivative as a rate measure) :

y என்ற கணியம் x என்ற கணியத்தைச் சார்ந்து மாறுபடுகின்றது. எனவே xஐ பொறுத்து yஇன் மாறுவீதம் $\frac{dy}{dx}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக உயரம் hஐ பொறுத்து, அழுத்தம் pஇன் மாறுவீதம் $\frac{dp}{dh}$ ஆகும். பொதுவாக காலத்தைப் பொறுத்து கணக்கிடப்படும் மாறுவீதத்தை 'மாறுவீதம்' எனக் கொள்ளலாம். இங்கு 'காலத்தைப் பொறுத்து' என்பது உள்ளிருப்பதாக பொருள். எடுத்துக்காட்டாக மின்னளவு 'i'இன் மாறுவீதம் $\frac{di}{dt}$ ஆகும். தட்பவெப்பநிலை 'θ'இன் மாறுவீதம் $\frac{d\theta}{dt}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.1 : $\theta°C$ வெப்ப நிலையில் l மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு உலோகத் துண்டின் சமன்பாடு $l = 1 + 0.00005\theta + 0.0000004\theta^2$ எனில், நீளத்தில் ஏற்படும் மாறுவீதம் (mm/°C)ஐ (i) 100°Cஇல் (ii) 400°Cஇல் காண்க.

தீர்வு : நீளத்தில் ஏற்படும் மாறுவீதம் $\frac{dl}{d\theta}$ ஆகும்.

$$\frac{dl}{d\theta} = 0.00005 + 0.0000008\theta .$$

(i) $\theta = 100°C$ என இருக்கும்போது $\frac{dl}{d\theta} = 0.00005 + (0.0000008)(100)$

$$= 0.00013 \text{ m}/°C = 0.13 \text{ mm}/°C$$

(ii) $\theta = 400°C$ என இருக்கும்போது $\frac{dl}{d\theta} = 0.00005 + (0.0000008)(400)$

$$= 0.00037 \text{ m}/°C = 0.37 \text{ mm}/°C$$

எடுத்துக்காட்டு 5.2 : ஒரு விளக்கின் ஒளிர்வு தன்மையின் வீரியம் I கேன்டுலா என்பது வோல்டேஜ் Vஐ பொறுத்து $I = 4 \times 10^{-4}V^2$ என்ற சமன்பாட்டால் தரப்படுமாயின், ஏற்படும் மாறுவீதம் 0.6 எனில் அதன் வோல்டேஜ் என்ன?

***தீர்வு* :** வோல்டேஜை பொறுத்து ஒளியில் ஏற்படும் மாறுவீதம் $\frac{dI}{dV}$.

$I = 4 \times 10^{-4}V^2$ எனக் கொண்டால் $\frac{dI}{dV} = 8 \times 10^{-4}V$

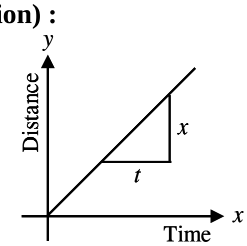
ஒரு வோல்ட்டில் ஏற்படும் ஒளி ஏற்றம் 0.6 கேன்டுலா எனில் $\frac{dI}{dV} = +0.6$ ஆகும்.

எனவே $0.6 = 8 \times 10^{-4}\,V$ ஆகும்.

$$\text{வோல்டேஜ் } V = \frac{0.6}{8 \times 10^{-4}} = 0.075 \times 10^4 = 750 \text{ வோல்ட்ஸ்}$$

_திசைவேகம்_ (Velocity) _மற்றும் முடுக்கம்_ (Acceleration) :

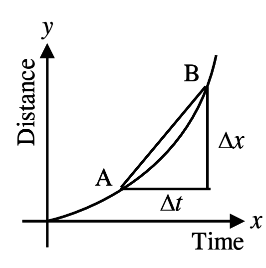
ஒரு சிற்றுந்து x மீட்டர் தூரம் t வினாடி நேரத்தில் ஓர் நேர்வழிச் சாலையில் செல்கிறது. இதன் திசைவேகம் 'v' ஒரு மாறிலி எனில், $v = \frac{x}{t}$ மீட்டர்/வினாடி i.e., படம் 5.1இல் காட்டப்பட்டுள்ள தூரம்/நேரம் வளைவரையின் சாய்வு ஒரு மாறிலியாகும்.



படம் 5.1

ஒரு சிற்றுந்தின் திசைவேகம் ஒரு மாறியாக இருப்பின் இதன் தூரம் / நேரம் பொறுத்து வரையப்படும் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடாக அமையாது (படம் 5.2இல் உள்ளது போல்)

ஒரு குறைந்த கால அளவையும் (Δt) மற்றும் சிறு தூரத்தையும் (Δx) பொறுத்து கிடைக்கும் சராசரி திசைவேகம், AB என்ற நாணின் சாய்வு வீதம் ஆகும்.

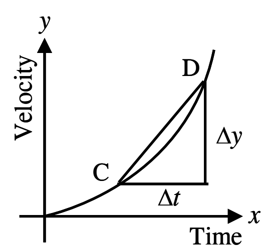


படம் 5.2

i.e., Δtஐ பொறுத்து கிடைக்கும் சராசரி திசைவேகம் $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ஆகும். $\Delta t \to 0$ எனும்போது AB என்ற நாண் Aஇல் தொடுகோடாகும் பட்சத்தில் A என்ற புள்ளியில் கிடைக்கப்பெறும் திசைவேகம் $v = \frac{dx}{dt}$ ஆகும்.

எனவே சிற்றுந்தின் திசைவேகம் எந்நேரத்திலும் தூரம் / நேரம் வரைபடத்தின் சாய்வு வீதம் ஆகும். தூரம் xஆனது நேரத்தின் (t) மூலம் கொடுக்கப்பட்டால், அதனை வகைப்படுத்த நாம் அடைவது திசைவேகம் ஆகும்.

ஒரு சிற்றுந்தின் முடுக்கம் ஆனது திசைவேகத்தைப் பொறுத்து ஏற்படும் மாறுவீதம் என வரையறுக்கலாம். படம் 5.3இல் திசைவேகம்/நேரம் வரைபடம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. vஇல் ஏற்படும் மாற்றத்தை Δv எனவும், அதற்கு ஏற்ப ஏற்படும் நேர மாற்றத்தை Δt எனவும் கொண்டால் $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ஆகும். $\Delta t \to 0$ ஆகும் போது CD என்ற நாண், Cஎன்ற புள்ளியில் தொடுகோடாகும் பட்சத்தில் Cஎன்ற புள்ளியில் கிடைக்கப்பெறும் முடுக்கம் $a = \frac{dv}{dt}$ ஆகும்.



படம் 5.3

எனவே சிற்றுந்தின் முடுக்கம் எந்நேரத்திலும் திசைவேகம் / நேரம் என்ற வரைபடத்தின் சாய்வு வீதம் ஆகும். திசைவேகம் v நேரம் tஇன் மூலமாக கொடுக்கப்பட்டால், அதனை வகைப்படுத்த நாம் அடைவது முடுக்கம் ஆகும்.

$$v = \frac{dx}{dt} \text{ எனும்போது முடுக்கம் } a = \frac{dv}{dt},$$

$$\text{இங்கு } a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

முடுக்கம் ஆனது tஐ பொறுத்து xஇன் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுவால் தரப்படும். மேற்குறிப்பிட்டவைகளை சுருக்கமாக பின்வருமாறு கூறலாம். ஒரு பொருள் x மீட்டர் தூரத்தினை t வினாடி நேரத்தில் கடக்குமாயின்,

(i) தூரம் $x = f(t)$.

(ii) திசைவேகம் $v = f'(t)$ அல்லது $\frac{dx}{dt}$, இதுவே தூரம் / நேரம் வரைபடத்தின் சாய்வு வீதம் ஆகும்.

(iii) முடுக்கம் $a = \dfrac{dv}{dt} = f\,''(t)$ அல்லது $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ இதுவே தூரம் / நேரம் வரைபடத்தின் சாய்வு வீதம் ஆகும்.

***குறிப்பு* :**(i) தொடக்க திசைவேகம் என்பது $t = 0$இல் கிடைக்கப்பெறும் திசைவேகம் ஆகும்.

(ii) தொடக்க முடுக்கம் என்பது $t = 0$இல் கிடைக்கப்பெறும் முடுக்கம் ஆகும்.

(iii) ஒரு துகள் செங்குத்தாக மேல்நோக்கிச் சென்று அதிகபட்ச உயரம் அடையும் போது அதன் திசை வேகம் பூச்சியம் ஆகிறது.

(iv) துகளின் இயக்கம் கிடைமட்டமாக இருந்து அது தேக்கநிலைக்கு வருமாயின் $v = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.3 : ஒரு சிற்றுந்து t வினாடி நேரத்தில் x மீட்டர் தூரத்தைக் கடக்கிறது. அதன் தூர மற்றும் நேரத் தொடர்பு $x = 3t^3 - 2\,t^2 + 4t - 1$ என்க. பின்வரும் நேரங்களில் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. (i) $t = 0$ மற்றும் (ii) $t = 1.5$ வினாடிகள்.

***தீர்வு* :** தூரம் $x = 3t^3 - 2\,t^2 + 4t - 1$

திசைவேகம் $v = \dfrac{dx}{dt} = 9t^2 - 4\,t + 4$ மீ/வினாடி

முடுக்கம் $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 18t - 4$ மீ/வினாடி^{2}

(i) $t = 0$ எனும்போது,

திசைவேகம் $v = 9(0)^2 - 4(0) + 4 = 4$ மீ/வினாடி

முடுக்கம் $a = 18(0) - 4 = -4$ மீ/வினாடி^{2}

(ii) $t = 1.5$ வினாடிகள் எனும் போது

திசைவேகம் $v = 9(1.5)^2 - 4(1.5) + 4 = 18.25$ மீ/வினாடி

மற்றும் முடுக்கம் $a = 18(1.5) - 4 = 23$ மீ/வினாடி^{2}

எடுத்துக்காட்டு 5.4 : ஒரு வானூர்தியிலிருந்து கீழே போடப்படும் பொருட்கள் t வினாடி நேரத்தில், x அலகு தூரத்தை வந்தடைகின்றன. இதன் தொடர்பு $x = \frac{1}{2}gt^2$ மற்றும் $g = 9.8$ மீ/வினாடி^{2} எனில் போடப்பட்ட 2 வினாடி நேரத்தில் பொருளின் திசைவேகம் மற்றும் முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

***தீர்வு* :** $x = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(9.8)\,t^2 = 4.9\,t^2$ மீ

திசைவேகம் $v = \frac{dx}{dt} = 9.8t$ மீ/வினாடி

முடுக்கம் $a = \frac{d^2x}{dt^2} = 9.8$ மீ/வினாடி^{2}

$t = 2$ வினாடிகள் எனும்போது,

திசைவேகம் $v = (9.8)(2) = 19.6$ மீ/வினாடி

மற்றும் முடுக்கம் $a = 9.8$ மீ/வினாடி^{2}.

எடுத்துக்காட்டு 5.5 : ஒரு பறக்கும் தட்டின் கோண அளவு தூரம் θ ரேடியன் ஆனது நேரம் t வினாடியை பொறுத்து மாறுபடுகிறது. மேலும். இவற்றிற்குரிய தொடர்பு $\theta = 9t^2 - 2t^3$ எனில்

(i) $t = 1$ வினாடியில் பறக்கும் தட்டின் கோண திசைவேகம் மற்றும் முடுக்கம் கணக்கிடுக.

(ii) கோண முடுக்கம் பூச்சியமாகும்போது அதன் நேரத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு : (i) கோண அளவு தூரம் $\theta = 9t^2 - 2t^3$ ரேடியன்

கோண திசைவேகம் $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 18t - 6t^2$ ரேடியன்/வினாடி

$t = 1$ வினாடி நேரத்தில்

$\omega = 18(1) - 6(1)^2 = 12$ ரேடியன்/வினாடி

கோண முடுக்கம் $= \frac{d^2\theta}{dt^2} = 18 - 12t$ ரேடியன்/வினாடி^{2}

t = 1 வினாடி நேரத்தில் முடுக்கம் = 6 ரேடியன்/வினாடி^{2}

(ii) கோண முடுக்கம் பூச்சியம் $\Rightarrow 18 - 12t = 0 \Rightarrow t = 1.5$ வினாடிகள்.

எடுத்துக்காட்டு 5.6 :

14.7 மீ. உயரமுள்ள மேடையிலிருந்து ஒரு சிறுவன் ஒரு கல்லை மேல்நோக்கி எறிகிறான். கம்பத்திலிருந்து சற்றுத் தள்ளி நேர்குத்தாக மேல்நோக்கி சென்று பின் அந்த கல் தரையை அடைகிறது. அதன் இயக்கச் சமன்பாடு, மீட்டர் மற்றும் வினாடியில் $x = 9.8\ t - 4.9t^2$ எனில் (i) மேல்நோக்கிச் செல்ல, மற்றும் கீழ்நோக்கி வர எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் எவ்வளவு? (ii) கல் தரையில் இருந்து மேலேச் சென்று அடைந்த அதிகபட்ச உயரம் என்ன?

தீர்வு **:**

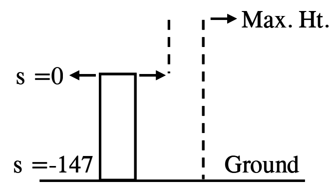
(i) $x = 9.8\,t - 4.9\,t^2$

அதிகபட்ச உயரத்தில், $v = 0$

$v = \dfrac{dx}{dt} = 9.8 - 9.8\,t$

$v = 0 \Rightarrow t = 1$ *வினாடி*

$\therefore$ *மேல்நோக்கிச் செல்ல எடுத்துக் கொண்ட நேரம் 1 வினாடி.*



படம் 5.4

x என்ற நிலை ஒவ்வொன்றுக்கும் உரிய காலம் 't' என்க.

மேடையின் உச்சியை $x = 0$ எனக் கொண்டால் தரையின் நிலை $x = -14.7$ ஆகும். கல் மேல்நோக்கிச் சென்று பின் கீழே வந்தடைய எடுத்துக் கொள்ளும் மொத்த நேரத்தினைக் கணக்கிட $x = -14.7$ஐ கொடுக்கப்பட்டு உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$-14.7 = 9.8\,t - 4.9t^2 \Rightarrow t = -1, 3$

$\Rightarrow t = -1$*ஆக இருக்க முடியாது. எனவே* $t = 3$*ஐ எடுத்துக் கொள்ளவும்.*

$\therefore$ *கீழ்நோக்கி வர எடுத்துக் கொண்ட நேரம் = 3 – 1 = 2 வினாடிகள்.*

(ii) $t = 1$ *என இருக்கும்போது* $x = 9.8(1) - 4.9(1) = 4.9$ *மீ*

கல் சென்றடையும் அதிகபட்ச உயரம் = மேடையின் உயரம் +4.9 = 19.6 மீ.

5.3 சார்ந்த வீதங்கள் **(Related Rates) :**

சார்ந்த வீதக் கணக்குகளில் ஒரு கணியத்தின் (quantity) *மாறுவீதத்தினை மற்றொரு கணியத்தின் மாறு வீதத்தின் மூலம் கணக்கிடப்படும். இதைக் காணும் முறையாவது, இரு கணியத்தையும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடுகளை அமைத்து அவற்றை இருபுறமும் சங்கிலி விதியைப் பயன்படுத்தி காலத்தை பொறுத்து வகையிட வேண்டும்.*

இப்பகுதியில் காணப்படும் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதற்கு பின்வரும் சில உத்திகளைக் கையாளலாம்.

(1) *கணக்கை கவனத்துடன் படிக்க வேண்டும்.*
(2) *முடிந்தால் அதற்குரிய வரைபடம் ஒன்று வரைய வேண்டும்.*
(3) *குறியீடுகளை அறிமுகப்படுத்த வேண்டும். நேரத்தை பொறுத்த சார்புகளின் கணியங்கள் யாவற்றுக்கும் குறியீடுகளை ஒதுக்க வேண்டும்.*
(4) *கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களையும் தேவையான வீதத்தையும் வகையீடுகள் மூலமாக எழுதிக் கொள்ளவும்.*
(5) *கணக்கில் இடம்பெறும் வெவ்வேறு கணியங்களைத் தொடர்புபடுத்தி சமன்பாடு எழுதவும். தேவைப்பட்டால், மாறிகளில் ஒன்றினை, கணக்கின் வடிவக் கணித இயல்பினைப் பயன்படுத்தி நீக்கலாம்.*

(6) இருபுறமும் tஐ பொறுத்து சங்கிலி விதியைப் பயன்படுத்தி வகைப்படுத்துதல் வேண்டும்.

(7) முடிவாக கிடைக்கப்பெறும் சமன்பாட்டில் கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களை பிரதியிட்டு, தெரியாத வீதத்தை காண வேண்டும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு : கோள வடிவில் உள்ள பலூன் ஒன்றில் காற்று அடைக்கப்படும் போது அதன் கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றம் வினாடிக்கு 100 க.செ.மீ. ஆகும். விட்டம் 50 செ.மீ என இருக்கும் போது அதன் ஆரம் எவ்வேகத்தில் அதிகரிக்கும் என்பதைக் காண்க.

தீர்வு : நாம் பின்வரும் இரண்டு விஷயங்களை கண்டறிந்து கொண்டு கணக்கைத் தீர்க்க ஆரம்பிப்போம்.

(i) தரப்பட்டுள்ள விவரம் : கன அளவில் ஏற்படும் அதிகரிப்பின் வீதம் வினாடிக்கு 100 க.செ.மீ.

(ii) தெரியாதது : விட்டம் 50 செ.மீ இருக்கும் போது, ஆரத்தில் ஏற்படும் ஏற்ற வீதம்.

அதன் ஆரம்பத்தில் ஏற்படும் ஏற்ற வீதம் கணித வழியாக இந்த கணியங்களை வெளிப்படுத்துவதற்கு நாம் சில குறியீடுகளை அறிமுகப்படுத்த வேண்டும்.

பலூன்களின் கன அளவு V மற்றும், ஆரம் r என்க. இங்கு முக்கியமாக மாறுவீதங்கள் வகைக்கெழுக்கள் ஆகும் என்பதனை மனத்தில் கொள்ளவும். இந்த கணக்கில் கன அளவு மற்றும் ஆரம் இரண்டுமே காலம் tஇன் சார்புகள். காலத்தைப் பொறுத்து கன அளவில் ஏற்படும் ஏற்றத்தின் வீதம் $\frac{dV}{dt}$ மற்றும் ஆரத்தில் ஏற்படும் ஏற்றத்தின் வீதம் $\frac{dr}{dt}$ ஆகும். இனி, தரப்பட்டுள்ளதையும், காண வேண்டியதையும் பின்வருமாறு எழுதலாம்***:***

தரப்பட்டுள்ளதாவது: $\frac{dV}{dt}=100$ செ.மீ^{3}/வினாடி மற்றும்

காண வேண்டியது: $r = 25$ செ.மீ என இருக்கும் போது $\frac{dr}{dt}$

$\frac{dV}{dt}$ மற்றும் $\frac{dr}{dt}$ ஐ இணைக்க, V மற்றும் r-ஐ இணைக்கும் கன அளவு சூத்திரம் $V = \frac{4}{3}\pi r^3$-ஐ எடுத்துக் கொள்ளவும்.

இருபுறமும் tஐ பொறுத்து வகையிட, வலதுபுறம் வகைக்கெழுப்படுத்த Vயினை r-இன் சார்பாகவும், rயினை tஇன் சார்பாகவும் கொண்டு சங்கிலி விதியினைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

i.e., $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\ 3\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

$r = 25$ மற்றும் $\frac{dV}{dt} = 100$ ஆகியவற்றை இச்சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

எனவே, $\frac{dr}{dt} = \frac{1 \times 100}{4\pi(25)^2} = \frac{1}{25\pi}$

பலூனின் ஆரத்தில் ஏற்படும் ஏற்ற வீதம் $\frac{1}{25\pi}$ செ.மீ/வினாடி.

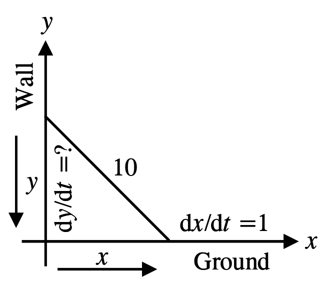
எடுத்துக்காட்டு 5.7 : 10 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு ஏணி செங்குத்தான சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் அடிப்பக்கம் சுவற்றிலிருந்து விலகிச் செல்லும் வீதம் 1 மீ/வினாடி எனில், ஏணியின் அடிப்பக்கம் சுவற்றிலிருந்து 6 மீ தொலைவில் இருக்கும் போது, அதன் உச்சி எவ்வளவு வீதத்தில் கீழ்நோக்கி இறங்கும் என்பதைக் காண்க.

தீர்வு : முதலில் படம் வரைந்து விவரங்களைக் குறித்துக் கொள்க.

சுவற்றிற்கும் ஏணியின் அடிப்பக்கத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் x என்க. ஏணியின் உச்சிக்கும் தரைக்கும் உள்ள செங்குத்து உயரம் y என்க. x மற்றும் y இரண்டுமே நேரம் 't'இன் சார்புகள் ஆகும்.

தரப்பட்டுள்ளது: $\frac{dx}{dt} = 1$ மீ/வினாடி.

கணக்கிட வேண்டியது: $x = 6$ மீட்டராக இருக்கும் போது $\frac{dy}{dt}$-இன் மதிப்பு



படம் 5.5

இந்த வினாவில் x மற்றும் yக்கிடையேயுள்ள தொடர்பினை பித்தாகரஸ் தேற்றத்தின்படி $x^2 + y^2 = 100$. …(1)

இருபுறமும் tஐ பொறுத்து சங்கிலி விதியைப் பயன்படுத்தி வகையிட நாம் அடைவது $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\ \frac{dx}{dt}$

சமன்பாடு (1)இல் $x = 6$ஐ பிரதியிட, $y = 8$ ஆகும்.

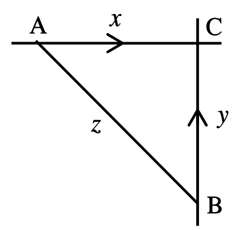
$x = 6, y = 8$ மற்றும் $\frac{dx}{dt} = 1$ ஆகியவற்றைப் பிரதியிட

$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4}$ மீ/வினாடி.

$\therefore$ ஏணி கீழ்நோக்கி நகரும் வீதம் $\frac{3}{4}$ மீ/வினாடி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.8 : ஒரு சிற்றுந்து A ஆனது மணிக்கு 50 கி.மீ. வேகத்தில் மேற்கிலிருந்து கிழக்கு நோக்கிச் செல்கிறது. மற்றொரு சிற்றுந்து B ஆனது மணிக்கு 60 கி.மீ. வேகத்தில் வடக்கு நோக்கிச் செல்கிறது. இவை இரண்டும் சாலைகள் சந்திக்கும் இடத்தை நோக்கிச் செல்கின்றன. சாலைகள் சந்திக்கும் முனையிலிருந்து சிற்றுந்து A ஆனது 0.3 கி.மீ. தூரத்திலும் சிற்றுந்து B ஆனது 0.4 கி.மீ. தூரத்திலும் இருக்கும்போது ஒன்றை ஒன்று நெருங்கும் வேக வீதத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு : இரண்டு சாலைகளும் சந்திக்கும் இடத்தை Cஎனக் கொண்டு படம் 5.6 வரைக. கொடுக்கப்பட்ட நேரம் tஇல் சிற்றுந்து A, Cஐ நோக்கி சென்ற தூரம் x எனவும் சிற்றுந்து B, Cயை நோக்கி சென்ற தூரம் y எனவும் எடுத்துக் கொள்க. Aக்கும் Bக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் z என்க. இங்கு x, y, z என்பன கி.மீ.ஆகக் கொள்க.



படம் 5.6

$\frac{dx}{dt} = -50$ கி.மீ./மணி மற்றும் $\frac{dy}{dt} = -60$ கி.மீ./மணி என

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. x மற்றும் yஇன் தூரங்கள் குறைவதால் இங்கு " – " குறியீடு எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

நெருங்குவேக வீதம் $\frac{dz}{dt}$ காணப்பட வேண்டும்.

பித்தாகரஸ் தேற்றத்தின்படி $z^2 = x^2 + y^2$ ஆகும்.

இருபுறமும் tஐ பொறுத்து வகையிட

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x \frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

$x = 0.3$, $y = 0.4$ எனும் போது $z = 0.5$ ஆகும்.

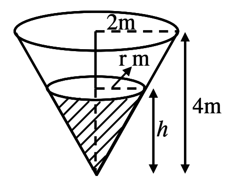
$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}\,[0.3\,(-50) + 0.4\,(-60)] = -78 \text{ கி.மீ/மணி}$$

i.e., இரண்டு சிற்றுந்துகளும் ஒன்றை ஒன்று நெருங்கும் வேக வீதம் 78 கி.மீ/மணி

எடுத்துக்காட்டு 5.9 : ஒரு நீர்நிலைத்தொட்டியானது தலைகீழாய் வைக்கப்பட்ட ஒரு நேர்வட்ட கூம்பின் வடிவில் உள்ளது. அதன் ஆரம் 2 மீட்டர், அதன் ஆழம் 4 மீட்டர் ஆகும். நிமிடத்திற்கு 2 க.மீட்டர் வீதம் தொட்டியில் நீர் பாய்ச்சப்படுகிறது. தொட்டியில் நீரின் ஆழம் 3மீட்டராக இருக்கும் பொழுது, நீர் மட்டத்தின் உயரம் அதிகரிக்கும் வீதத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

முதலில் கூம்பினை படம் 5.7இல் உள்ளது போல் வரைந்து விவரங்களைக் குறித்துக் கொள்ளவும். t நேரத்தில் கூம்பின் கன அளவு, ஆரம், உயரம் முறையே V, r மற்றும் h என்க. இங்கு t ஆனது நிமிடங்களாக எடுத்துக் கொள்ளப்படும்.



படம் 5.7

$\frac{dV}{dt} = 2$ *என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.*

$h = 3$*மீ ஆக இருக்கும்போது* $\frac{dh}{dt}$ *கணக்கிட வேண்டும்.*

V, r, h,*ஆகியவை* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ *என்ற சமன்பாட்டினால் தொடர்பு படுத்தப்படுகின்றன. இங்கு* V*க்குரிய சமன்பாடு* h*-இல் மட்டுமே இருந்தால் மிக உதவியாக இருக்கும். இதற்காக, படம் 5.7இல் வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து,* $\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$ *மற்றும்* $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$.

t*ஐ பொறுத்து இருபுறமும் வகைக் காண,*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

இதில் $h = 3$*மீ. மற்றும்* $\frac{dV}{dt} = 2$*ஐ பிரதியிட,*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}(2) = \frac{8}{9\pi} \text{ மீ/நி}$$

பயிற்சி 5.1

(1) *ஒரு ஏவுகணை, தரையிலிருந்து செங்குத்தாக மேல்நோக்கிச் செலுத்தும் போது* t *நேரத்தில் செல்லும் உயரம்* x *என்க. அதன் சமன்பாடு* $x = 100t - \frac{25}{2}t^2$ *எனில்* (i) *ஏவுகணையின் தொடக்க திசைவேகம்* (ii) *ஏவுகணை உச்ச உயரத்தை அடையும் போது அதன் நேரம்* (iii) *ஏவுகணை அடையும் உச்ச உயரம்* (iv) *ஏவுகணை தரையை அடையும் போது அதன் திசை வேகம் ஆகியவற்றை காண்க.*

(2) *ஓரலகு நிறையுடைய ஒரு துகள்* t *வினாடி நேரத்தில் ஏற்படுத்தும் இடப்பெயர்ச்சி* $x = 3\cos(2t - 4)$ *எனில், 2 வினாடிகளின் முடிவில் அதன் முடுக்கம் மற்றும் அதன் இயக்க ஆற்றல் (K.E.) முதலியவற்றைக் காண்க.* [$K.E. = 1/2\, mv^2$, m *என்பது நிறை*]

(3) வேகத்தடையை (Break) செலுத்திய பின்னர் ஒரு வாகனம் t வினாடிகளில் செல்லும் தூரம் xஐ $x = 20\,t - \frac{5}{3}t^2$ என்ற சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது எனில் (i) வேகத்தடை செலுத்தப்பட்ட நேரத்தில் வாகனத்தின் வேகம் (கி.மீ./மணி) (ii) அவ்வாகனம் தேக்க நிலைக்கு வருமுன் அது கடந்த தூரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(4) நியூட்டனின் குளிரூட்டும் விதி $\theta = \theta_0^{\circ}\, e^{-kt}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது. இங்கு ஆரம்ப வெப்பநிலை $\theta_0^{\circ}C$ ஆகும். மற்றும் t வினாடிகளில் வெப்பநிலை $\theta^{\circ}C$ ஆகும். 40 வினாடிகளுக்குப் பிறகு அதன் வெப்பநிலை மாறும் வீதத்தைக் காண்க. இங்கு $\theta_0 = 16^{\circ}\, C$ மற்றும் $k = -\,0.03$ எனக் கொள்க. [$e^{1.2} = 3.3201$)

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துயரம் 1 செ.மீ/நிமிடம் வீதத்தில் அதிகரிக்கும் போது, அதன் பரப்பு 2 ச.செ.மீ./நிமிடம் எனும் வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது. குத்துயரம் 10 செ.மீ. ஆகவும் பரப்பு 100 ச.செ.மீஆகவும் இருக்கும் போது முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் என்ன வீதத்தில் மாறும் என்பதைக் காண்க.

(6) நண்பகலில் A என்ற கப்பல், B என்ற கப்பலுக்கு மேற்குப் புறமாக 100 கி.மீ. தூரத்தில் உள்ளது. கப்பல் A ஆனது மணிக்கு 35 கி.மீ. வேகத்தில் கிழக்கு நோக்கிச் செல்கிறது. கப்பல் Bஆனது மணிக்கு 25 கி.மீ. வேகத்தில் வடக்கு நோக்கிச் செல்கின்றது எனில், மாலை 4.00 மணிக்கு இரண்டு கப்பல்களுக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் எவ்வளவு வேகமாக மாறும் என்பதைக் காண்க.

(7) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே 4மீ, 5மீ ஆகும். மற்றும் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோண அளவின் ஏறும் வீதம் வினாடிக்கு 0.06 ரேடியன் எனில், நிலையான நீளங்களை உடைய அந்த பக்கங்களுக்கு இடையே கோண அளவு $\pi/3$ஆக இருக்கும் போது, அதன் பரப்பில் ஏற்படும் ஏற்ற வீதம் காண்க.

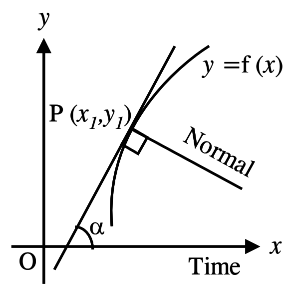
(8) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்க அளவுகள் முறையே 12 மீ, 15மீ. மற்றும் இவற்றின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் ஏறும் வீதம் நிமிடத்திற்கு 2°எனில் நிலையான நீளங்கள் கொண்ட பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 60°ஆக இருக்கும் போது, அதன் மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு விரைவாக அதிகரிக்கும் என்பதைக் காண்க.

(9) ஒரு விசை இழுப்பான் மூலம் செலுத்தப்படும் கருங்கல் ஜல்லிகள், வினாடிக்கு 30 க.அடி வீதம் மேலிருந்து கீழே கொட்டப்படும்போது அவை கூம்பு வடிவத்தைக் கொடுக்கிறது. எந்நேரத்திலும் அக்கூம்பின் விட்டமும், உயரமும் சமமாகவே இருக்குமானால், கூம்பின் உயரம் 10 அடியாக இருக்கும் போது உயரம் என்ன வீதத்தில் உயர்கிறது என்பதைக் காண்க.

5.4. தொடுகோடுகள் மற்றும் செங்கோடுகள் (வகையீட்டை சாய்வு வீதத்தின் அளவாக எழுதுதல்)

(Tangents and Normals [Derivative as a measure of slope])

இப்பகுதியில் சமதள வடிவியலில் வகையீட்டின் பயனீடுகள் பற்றி நாம் தெரிந்து கொள்ளலாம். $y = f(x)$ என்ற சமன்பாடுடைய வளைவரையினை எடுத்துக் கொள்வோம். இவ்வளைவரையின் மீது $P(x_1,y_1)$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. இப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு ஆய அச்சுகளுக்கு இணையாக இல்லாமல் இருந்தால் Pஇல் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்.



படம் 5.8

சாய்வு (வளைவு) m மற்றும் (x_1,y_1) என்ற புள்ளி வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$ ஆகும்.

தொடுகோட்டின் சாய்வு $m = f\,'(x_1) = (x_1,y_1)$ என்ற புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பு என்பது நாம் அறிந்ததே. எனவே தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = f\,'(x_1)\,(x - x_1)$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

$m = 0$ எனில், இந்த வளைவரைக்கு $P(x_1,y_1)$ என்ற புள்ளியில் $y = y_1$ என்ற கிடைமட்டக் கோடு தொடுகோடாக அமையும்,

$x = x_1$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$ என்ற வளைவரை தொடர்ச்சியாக இருந்து $\lim_{x \to x_1} f\,'(x) = \infty$ எனில் $x = x_1$என்ற நிலை குத்துக்கோடு தொடுகோடாக அமையும். ஒரு வளைவரைக்கு தரப்பட்ட புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டுடன், ஒரு செங்கோட்டையும் நாம் காணலாம். இதன் வரையறை பின்வருமாறு:

***வரையறை* :** கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் வளைவரைக்கு செங்கோடு என்பது அப்புள்ளிவழிச் செல்வதும், தொடு கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமைவதுமாகும்.

வரையறையில் இருந்து செங்கோட்டின் சாய்வு m'எனில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோடு இவைகளின் சாய்வுகளுக்கு இடையேயான தொடர்பு $m' = -{}^1/_m$.

(அ.து.), $m' = -\dfrac{1}{f\,'(x_1)} = (x_1,y_1)$ என்ற புள்ளியில் $\dfrac{-1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}$

$P(x_1,y_1)$ என்ற புள்ளியில் $y = f(x)$ என்கிற வளைவரைக்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = -\dfrac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும். (x_1,y_1)இல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு :

(i) தொடுகோடு கிடைமட்டக் கோடு எனில் செங்கோடு $x = x_1$ ஆகும்.

(ii) தொடுகோடு நிலை குத்துக்கோடு எனில் செங்கோடு $y = y_1$ ஆகும்.

பிற நிலைகளில்,

(iii) $y - y_1 = \dfrac{-1}{m}(x - x_1)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.10: $y = x^3$ எனும் வளைவரைக்கு (1,1) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு : $y = x^3$; சாய்வு $m = y' = 3x^2$.

(1,1) என்ற புள்ளியில் சாய்வு $= 3(1)^2 \Rightarrow m = 3$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 3(x - 1)$ அல்லது $y = 3x - 2$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(x - x_1)$

$y - 1 = \dfrac{-1}{3}(x - 1)$ அல்லது $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 5.11 : $y = x^2 - x - 2$ எனும் வளைவரைக்கு (1,– 2) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு : $y = x^2 - x - 2$;

(1,–2) என்ற புள்ளியில் சாய்வு $m = \dfrac{dy}{dx} = 2x - 1 = 2(1) - 1 = 1$

i.e., $m = 1$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$ i.e., $y - (-2) = x - 1$

i.e., $y = x - 3$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = \dfrac{-1}{m}(x - x_1)$

i.e., $y - (-2) = \dfrac{-1}{1}(x - 1)$

i.e., $y = -x - 1$

எடுத்துக்காட்டு 5.12 : $xy = c^2$ என்ற வளைவரைக்கு (a,b) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு : வளைவரையின் சமன்பாடு $xy = c^2$.

x ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் அடைவது $y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \text{ மற்றும் } m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,\, b)} = \frac{-b}{a} .$$

தேவையான தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - b = \frac{-b}{a}\ (x - a)$$

$$\text{i.e., } ay - ab = -bx + ab$$

$$bx + ay = 2ab \text{ அல்லது } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 5.13 : $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ என்ற துணையலகு சமன்பாடுகளைக் கொண்ட வளைவரைக்கு $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ இல் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு : $\dfrac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta) = 2a\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$$\frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta = -2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\text{எனவே } \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = -\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \text{ சாய்வு } m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta = \pi/2} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ இல் வளைவரையில் மீதுள்ள புள்ளி $\left(a\dfrac{\pi}{2} + a,\ a\right)$.

எனவே $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ இல் அமையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - a = (-1)\left[x - a\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\right]$$

$$\text{i.e., } x + y = \frac{1}{2}a\pi + 2a \text{ அல்லது } x + y - \frac{1}{2}a\pi - 2a = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - a = (1)\left[x - a\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\right]$

அல்லது $x - y - \frac{1}{2}a\pi = 0$

எடுத்துக்காட்டு 5.14 :

$16x^2 + 9y^2 = 144$ என்ற வளைவரைக்கு $x_1 = 2$ மற்றும் $y_1 > 0$ என இருக்குமாறு (x_1,y_1) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு, செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு : $16x^2 + 9y^2 = 144$

$x_1 = 2$ மற்றும் $y_1 > 0$ எனுமாறு (x_1,y_1) என்ற புள்ளி வளைவரையின் மீது இருக்கும்போது,

$$(16 \times 4) + 9\,y_1^2 = 144 \quad 9\,y_1^2 = 144 - 64 = 80$$

$y_1^2 = \frac{80}{9} \quad \therefore\ y_1 = \pm\frac{\sqrt{80}}{3}$. ஆனால் $y_1 > 0 \quad \therefore\ y_1 = \frac{\sqrt{80}}{3}$

$\therefore$ தொடுபுள்ளி $(x_1,y_1) = \left(2\,,\frac{\sqrt{80}}{3}\right)$

$$16x^2 + 9y^2 = 144$$

xஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{32}{18}\,\frac{x}{y} = -\frac{16}{9}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$\therefore \left(2\,,\frac{\sqrt{80}}{3}\right)$ என்ற புள்ளியில் சாய்வு $= -\frac{16}{9} \times \frac{2}{\frac{\sqrt{80}}{3}} = -\frac{8}{3\sqrt{5}}$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y - \frac{\sqrt{80}}{3} = -\frac{8}{3\sqrt{5}}(x - 2)$

i.e., $8x + 3\sqrt{5}\,y = 36$

இதைப் போன்று கண்டுபிடிக்கப்படும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $9\sqrt{5}\,x - 24\,y + 14\sqrt{5} = 0$ என அடையலாம்.

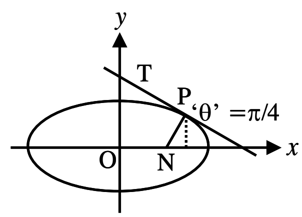
எடுத்துக்காட்டு 5.15 :

$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ என்ற துணையலகு சமன்பாடுகளைக் கொண்ட நீள்வட்டத்திற்கு $\theta = \frac{\pi}{4}$ இல் வரையப்படும் தொடுகோடு, செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு : $\theta = \frac{\pi}{4}$இல் $(x_1, y_1) = \left(a\cos\frac{\pi}{4},\ b\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-b}{a}\cot\theta$$



படம் 5.9

$$\Rightarrow m = = \frac{-b}{a}\cot\frac{\pi}{4} = \frac{-b}{a}$$

தொடுபுள்ளி $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ *மற்றும் அதன் சாய்வு* $m = \frac{-b}{a}$ *ஆகும்.*

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

i.e., $bx + ay - ab\sqrt{2} = 0$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

i.e., $(ax - by)\sqrt{2} - (a^2 - b^2) = 0.$

எடுத்துக்காட்டு 5.16 : $y^2 = 20x$ *என்ற பரவளையத்தின் ஒரு தொடுகோடு* x*அச்சுடன்* 45° *கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது எனில், அதன் சமன்பாடு காண்க.*

தீர்வு : (x_1, y_1) *என்பது தொடுபுள்ளி என்க.*

$$y^2 = 20x$$
$$2yy' = 20$$
$$y' = \frac{10}{y}$$

$\therefore$ (x_1, y_1) *என்ற புள்ளியில் சாய்வு* $m = \frac{10}{y_1}$ … (1)

தொடுகோடு x*அச்சுடன்* 45° *கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது.*

$\therefore$ *தொடுகோட்டின் சாய்வு* $m = \tan 45° = 1$ … (2)

(1) *மற்றும்* (2)-*இல் இருந்து* $\frac{10}{y_1} = 1 \Rightarrow y_1 = 10$

(x_1, y_1) *என்ற புள்ளி* $y^2 = 20x$ *மீது அமைவதால்,* $y_1^2 = 20x_1$

$100 = 20x_1$ *அல்லது* $x_1 = 5$ i.e., $(x_1, y_1) = (5, 10)$

(5, 10) *என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,*

$y - 10 = 1(x - 5)$ *அல்லது* $y = x + 5.$

குறிப்பு: *இக்கணக்கினை பரவளையத்தின் மீது வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + a/m$ என்பதனைப் பயன்படுத்தி எளிதில் தீர்வு காணலாம்.*

5.5 இரு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்
(Angle between two curves) :

C_1 மற்றும் C_2 என்ற இரு வளைவரைகள் P என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கிறது என்க. வெட்டுப்புள்ளியில் இவ்விரு வளைவரைகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம், அப்புள்ளியில் வளைவரைகளுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணமாகும். (தொடுகோடுகளை வரைய முடிந்தால்). C_1 மற்றும் C_2 என்ற இரண்டு வளைவரைகளின் சமன்பாடுகளின் கார்டீசியன் அமைப்பு முறையே $y = f(x)$ மற்றும் $y = g(x)$ என்க. மேலும் அவை வெட்டும் புள்ளி $P(x_1,y_1)$ என்க.

P என்ற புள்ளியில் C_1, C_2 என்ற வளைவரைகளுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் PT_1, PT_2 என்க. அவை x-அச்சின் மிகைத்திசையுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் ψ_1 மற்றும் ψ_2 என்க.

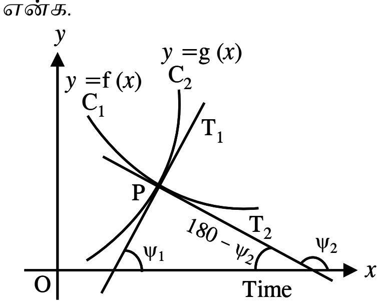
PT_1 மற்றும் PT_2க்கு இடைப்பட்ட கோணம் ψ எனில் $\psi=\psi_2 - \psi_1$ மற்றும்

$$\tan\psi = \tan(\psi_2 - \psi_1)$$

$$= \frac{\tan\psi_2 - \tan\psi_1}{1 + \tan\psi_1 \tan\psi_2}$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

இங்கு $0 \le \psi < \pi$



படம் 5.10

இவற்றிலிருந்து நாம் தெரிந்து கொள்வது யாதெனில், சாய்வுகள் இரண்டும் சமமாயின் ($m_1 = m_2$) இரண்டு வளைவரைகளும் ஒன்றை ஒன்று தொட்டுச் செல்லும்.

பெருக்கற்பலன் $m_1\, m_2 = -1$ எனில் இரண்டு வளைவரைகளும் ஒன்றை ஒன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும். ஆனால் மறுதலை உண்மை அல்ல. அதாவது இரண்டு வளைவரைகளும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொண்டால் $m_1\; m_2$ என்பது -1ஆக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

குறிப்பு : *ψ_1 விரிகோணமாகவும் ψ_2 குறுங்கோணமாகவும் இருந்தால் $\psi = \psi_2 - \psi_1$ ஆகும். ψ_1 குறுங்கோணமாகவும் ψ_2 விரிகோணமாகவும் இருந்தால் $\psi = \psi_1 - \psi_2$ ஆகும்.*

இரண்டு நிலைகளையும் ஒன்று சேர்த்து எடுத்துக் கொண்டால், இடைப்பட்ட கோணம் $\psi_1 \sim \psi_2$ அல்லது

$$\tan\psi = \tan(\psi_1 \sim \psi_2) = \frac{\tan\psi_1 \sim \tan\psi_2}{1 + \tan\psi_1 \tan\psi_2} = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

எடுத்துக்காட்டு 5.17 : $y = x^2$ மற்றும் $y = (x - 2)^2$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியில் அவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு : வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியைக் காண இரண்டு வளைவரைகளின் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க வேண்டும்.

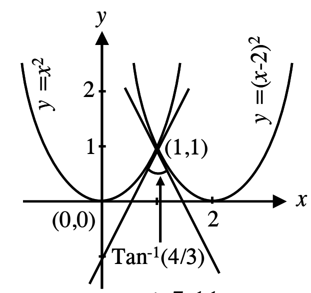
$x^2 = (x - 2)^2$

$\Rightarrow x = 1.$ $x = 1$ எனில் $y = 1$

$\therefore$ வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி (1, 1)

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = 2$$



படம் 5.11

$$y = (x-2)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(x-2) \Rightarrow m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = -2.$$

இடைப்பட்ட கோணம் ψ எனில்,

$$\tan\psi = \left|\frac{-2-2}{1-4}\right| = \left|\frac{-4}{-3}\right| \Rightarrow \psi = \tan^{-1}\frac{4}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.18 : $ax^2 + by^2 = 1$, $a_1x^2 + b_1y^2 = 1$ என்ற வளைவரைகள் ஒன்றை ஒன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளத் தேவையான நிபந்தனையைக் காண்க.

தீர்வு :

வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி (x_1, y_1) என்க.

எனவே, $ax_1^2 + by_1^2 = 1$; $a_1x_1^2 + b_1y_1^2 = 1$

$$x_1^2 = \frac{b_1 - b}{ab_1 - a_1b}, \quad y_1^2 = \frac{a - a_1}{ab_1 - a_1b} \text{ (கிரேமர் விதிப்படி)}$$

$$ax^2 + by^2 = 1\text{க்கு} \quad m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = \frac{-ax_1}{by_1}$$

மற்றும் $a_1x^2 + b_1y^2 = 1$க்கு $m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = \frac{-a_1x_1}{b_1y_1}$

செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்வதால், $m_1m_2 = -1$

i.e., $\left(\frac{-ax_1}{by_1}\right)\left(\frac{-a_1x_1}{b_1y_1}\right) = -1 \Rightarrow \frac{a\,a_1x_1^{\,2}}{bb_1y_1^{\,2}} = -1.$

$$aa_1x_1^{\,2} + bb_1y_1^{\,2} = 0 \Rightarrow aa_1\left(\frac{b_1-b}{ab_1-a_1b}\right) + bb_1\left(\frac{a-a_1}{ab_1-a_1b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad aa_1(b_1 - b) + bb_1(a - a_1) = 0 \Rightarrow \frac{b_1-b}{bb_1} + \frac{a-a_1}{aa_1} = 0$$

அல்லது $\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a} = 0$ அல்லது $\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}$ என்பது தேவையான நிபந்தனையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.19 : $x^2 - y^2 = a^2$ மற்றும் $xy = c^2$ என்ற வளைவரைகள் ஒன்றை ஒன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு : வளைவரைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி (x_1,y_1) என்க.

$\therefore\ x_1^{\,2} - y_1^{\,2} = a^2$ மற்றும் $x_1\,y_1 = c^2$

$$x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\therefore m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = \frac{x_1}{y_1} \quad \text{ie., } m_1 = \frac{x_1}{y_1}$$

$$xy = c^2 \Rightarrow y = \frac{c^2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{c^2}{x^2}$$

$$\therefore m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = \frac{-c^2}{x_1^{\,2}} \text{ i.e., } m_2 = \frac{-c^2}{x_1^{\,2}}$$

$$\therefore m_1m_2 = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{-c^2}{x_1^{\,2}}\right) = \frac{-c^2}{x_1\,y_1} = \frac{-c^2}{c^2} = -1$$

$\Rightarrow$ வளைவரைகள் ஒன்றை ஒன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன.

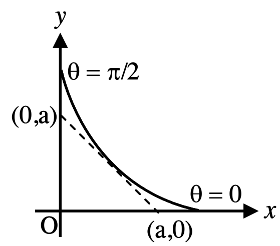
எடுத்துக்காட்டு 5.20 : $x = a\cos^4\theta,\ y = a\sin^4\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ என்ற துணை அலகு சமன்பாடுகளைக் கொண்ட வளைவரைக்கு வரையப்பட்ட எந்தவொரு தொடுகோடும் ஏற்படுத்தும் ஆய அச்சுத் துண்டுகளின் கூடுதல் a எனக் காட்டுக.

தீர்வு : ஏதேனும் புள்ளி 'θ'ஐ ($a\cos^4\theta$, $a\sin^4\theta$,) எனக் கொள்ளலாம்.

இங்கு $\dfrac{dx}{d\theta} = -4a\cos^3\theta\sin\theta$;

மற்றும் $\dfrac{dy}{d\theta} = 4a\sin^3\theta\cos\theta$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$



படம் 5.12

i.e., 'θ'இல் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வு $= -\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

'θ'இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $(y - a\sin^4\theta) = \dfrac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}(x - a\cos^4\theta)$

அல்லது $x\sin^2\theta + y\cos^2\theta = a\sin^2\theta\cos^2\theta$

$$\Rightarrow \frac{x}{a\cos^2\theta} + \frac{y}{a\sin^2\theta} = 1$$

i.e., ஆய அச்சுக்களின் கூடுதல் $= a\cos^2\theta + a\sin^2\theta = a$

பயிற்சி 5.2

(1) பின்வரும் வளைவரைகளுக்குத் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $y = x^2 - 4x - 5$; $x = -2$ (ii) $y = x - \sin x\cos x$; $x = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) $y = 2\sin^2 3x$; $x = \dfrac{\pi}{6}$ (iv) $y = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$; $x = \dfrac{\pi}{4}$

(2) $x^2 - y^2 = 2$ எனும் வளைவரைக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வு 2 எனில் தொடுபுள்ளியைக் காண்க.

(3) $x^2 + y^2 = 13$ எனும் வளைவரையின் தொடுகோடு $2x + 3y = 7$ எனும் கோட்டிற்கு இணையாயின் அத்தொடுகோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

(4) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோடானது (i) x – அச்சுக்கு (ii) y – அச்சுக்கு, இணையாக இருக்கும்போது அதன் தொடுபுள்ளிகளைக் காண்க.

(5) $x^2 + y^2 = 52$ என்ற வட்டத்திற்கு $2x + 3y = 6$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(6) $y = x^3 - 3x$ எனும் வளைவரைக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகள் $2x + 18y - 9 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக இருப்பின் அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(7) $y = x^3$ என்ற வளைவரையின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி P என்க. Pஇல் வரையப்பட்ட தொடுகோடானது வளைவரையை மறுபடியும் Qஇல் சந்திக்குமானால், Qஇல் தொடுகோட்டின் சாய்வு, Pஇல் உள்ள சாய்வைப் போல் 4 மடங்கு எனக்காட்டுக.

(8) $2x^2 + 4y^2 = 1$ மற்றும் $6x^2 - 12y^2 = 1$ எனும் வளைவரைகள் ஒன்றை ஒன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் எனக் காட்டுக.

(9) $y = a^x$ மற்றும் $y = b^x$; $(a \neq b)$ வெட்டிக் கொள்ளும் கோணம் θஐக் காண்க.

(10) $x = a \cos^3 \theta$; $y = a \sin^3\theta$ எனும் துணை அலகு சமன்பாடுகளைக் கொண்ட வளைவரைக்கு 'θ'இல் வரையப்படும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $x \cos \theta - y \sin \theta = a \cos 2\theta$ எனக் காட்டுக.

(11) $y^2 = x$ மற்றும் $xy = k$ எனும் வளைவரைகள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொண்டால், $8k^2 = 1$ என நிரூபிக்க.

5.6 இடைமதிப்புத் தேற்றங்கள் மற்றும் அவற்றின் பயன்பாடுகள் (Mean value theorems and their applications) :

இப்பகுதியில், ஒரு எளிய வளைவரையில் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே, அவ்விரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணுக்கு இணையாக தொடுகோடு ஒன்று அமையுமாறு ஒரு தொடுபுள்ளி இருக்கும் என்பதைக் காண்போம். இதைக் கணக்கிட, மைக்கேல் ரோல் (Michael Rolle) என்பவரின் தேற்றம் தேவைப்படுகிறது.

5.6.1 ரோலின் தேற்றம்:

f என்பது மெய்மதிப்புடைச் சார்பு என்க.

(i) f ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$இல் வரையறுக்கப்பட்டு தொடர்ச்சியாகவும்,

(ii) திறந்த இடைவெளி (a, b)இல் வகையிடத்தக்கதாகவும்,

(iii) $f(a) = f(b)$ ஆகவும் உள்ளது, எனில்

குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c \in (a,b)$ஐ $f'(c) = 0$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு காணலாம்.

சில கவனக்குறிப்புகள் :

- t நேரத்தில் ஒரு நகரும் பொருளின் நிலையைத் தரும் சார்பான $s = f(t)$க்கு ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.
- $t = a$ மற்றும் $t = b$ ஆகிய நேரங்களில் பொருளானது ஒரே நிலையில் இருப்பதாகக் கொண்டால், $f(a) = f(b)$ என்ற ரோலின் நிபந்தனையை நிறைவு செய்வதாக அமையும். ரோல் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகள் பூர்த்தியாவதால் அத்தேற்றத்தின்படி aக்கும் bக்கும் இடையில் c என்ற நேரத்தை $f'(c) = 0$ எனுமாறு காணலாம். அதாவது $t = c$இல் பொருளின் திசை வேகம் பூச்சியம் ஆகும். இக்கொள்கையானது நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்பட்ட பொருளுக்கும் உண்மையாவதைக் காணலாம். (காற்றுத்தடை நீக்கலாக)
- $f(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டுக்கு a, b என்ற இரண்டு மூலங்கள் இருப்பின், ரோலின் தேற்றத்தின்படி $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு a மற்றும் bக்கு இடையில் குறைந்தது ஒரு மூலம் cஆவது இருக்கும்.
- ஒரு எளிய வளைவரை ஒரு கிடைக்கோட்டை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுமாயின், நிச்சயமாக அவ்விரு புள்ளிகளுக்கு இடையில் வளைவரைக்கு ஒரு கிடைத்தொடுகோடு இருக்கும்.
- c ஒரு மாறிலியாயின் $f(x)=c$க்கு ரோலின் தேற்றம் வெளிப்படையாக உண்மையாவதைக் காணலாம்.
- ரோல் தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையல்ல. அதாவது ஒரு சார்பு f ஆனது $c \in (a,b)$க்கு $f'(c) = 0$ என்பதனை உண்மையாக்குவதைக் கொண்டு ரோல் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகள் பூர்த்தியாகும் என சொல்ல முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு 5.21 :

ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, cஇன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க.

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, இங்கு $-1 \le x \le 1$

(ii) $f(x) = (x - a)(b - x)$, இங்கு $a \le x \le b$, $a \ne b$.

(iii) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$, இங்கு $\frac{1}{2} \le x \le 3$

தீர்வு : (i) இந்த சார்பு $[-1,1]$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியாகவும் $(-1,1)$ என்ற இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கதாகவும் உள்ளது.

மேலும் $f(1) = f(-1) = 0$ எனவே ரோலின் தேற்றத்தின் எல்லா நிபந்தனைகளையும் $f(x)$ பூர்த்தி செய்வதைக் காண்கிறோம்.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

($x = 0$ எனில் தொகுதி $= 1 \neq 0$) எனவே $c = 0 \in (-1, 1)$ என்கிற மதிப்பு ரோலின் தேற்றத்தை உண்மையாக்குகின்ற தகுந்த மதிப்பு ஆகும்.

(ii) $f(x) = (x-a)(b-x),\ a \leq x \leq b,\ a \neq b.$

$f(x)$ என்பது $[a,b]$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியாகவும் (a,b) என்ற இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கதாகவும் அமைகிறது, மேலும் $f(a)= f(b) = 0$. எனவே எல்லா நிபந்தனைகளையும் $f(x)$ நிறைவு செய்கின்றது.

$$\therefore f'(x) = (b-x) - (x-a)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x = -b-a \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

$c = \frac{a+b}{2}$ மதிப்பு ரோலின் தேற்றத்தை உண்மையாக்கக் கூடிய தகுந்த மதிப்பாகும்.

(iii) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 3$

$f(x)$ என்ற சார்பு $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியாகவும் $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ என்ற இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கதாகவும் அமைகிறது.

மேலும் $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = f(3) = 0$. எனவே எல்லா நிபந்தனைகளையும் $f(x)$ நிறைவு செய்கிறது.

$$f'(x) = 6x^2 - 10x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (3x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3},\ x = 2.$$

$x = -\frac{1}{3}$ என்பது $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ என்ற இடைவெளியில் இல்லை.

$\therefore x = 2$ என்பது பொருத்தமான புள்ளியாகும்.

$\therefore c = 2$ ரோலின் தேற்றத்தினை உண்மையாக்குகின்ற தகுந்த மதிப்பாகும்.

மேற்குறிப்பு : ஏதேனும் ஒரு நிபந்தனை பூர்த்தியாகவில்லை எனில் ரோலின் தேற்றத்தினை பயன்படுத்த இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 5.22: பின்வருவனவற்றிற்கு ரோலின் தேற்றத்தைச் சரிபாக்க:

(i) $f(x) = x^3 - 3x + 3 \quad 0 \le x \le 1$ (ii) $f(x) = \tan x, \quad 0 \le x \le \pi$

(iii) $f(x) = |x|, \ -1 \le x \le 1$ (iv) $f(x) = \sin^2 x, \ 0 \le x \le \pi$

(v) $f(x) = e^x \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$ (vi) $f(x) = x(x-1)(x-2), \quad 0 \le x \le 2$

தீர்வு : (i) $f(x) = x^3 - 3x + 3 \quad 0 \le x \le 1$

[0,1]இல் $f(x)$ தொடர்ச்சியாகவும் (0,1)இல் $f(x)$ வகையிடத் தக்கதாகவும் அமைகிறது.

மேலும் $f(0) = 3$ மற்றும் $f(1) = 1 \Rightarrow f(a) \ne f(b)$

ரோலின் தேற்றம் தரப்பட்ட $f(x)$க்கு உண்மையாகாது.

$f(a) = f(b)$ என்ற நிபந்தனை நிறைவு செய்யப்படாததால் ரோலின் தேற்றம் தரப்பட்ட $f(x)$க்கு உண்மையாகாது.

மேலும் $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$f'(c) = 0$ எனும்படியாக குறைந்தது ஒரு உறுப்பு c ஆனது (0,1)இல் இருக்கும் என்கிற முடிவு உண்மையாகாததை இங்கு காணலாம்.

(ii) $f(x) = \tan x, \quad 0 \le x \le \pi$

$[0,\pi]$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றது. $x = \frac{\pi}{2}$இல் $\tan x \to +\infty$. எனவே, ரோலின் தேற்றம் பொருந்தாது.

(iii) $f(x) = |x|, \ -1 \le x \le 1$

$[-1,1]$இல் f தொடர்ச்சியுடையது. ஆனால் $(-1,1)$இல் வகையிடத்தக்கதல்ல. ஏனெனில் $f'(0)$ஐ காண முடியாது. எனவே ரோலின் தேற்றம் பொருந்தாது.

(iv) $f(x) = \sin^2 x, \ 0 \le x \le \pi$

$[0,\pi]$இல் f தொடர்ச்சியுடையது, மற்றும்$(0,\pi)$இல் வகையிடத்தக்கது. $f(0) = f(\pi) = 0$ (ie.,) ரோலின் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளை f ஆனது நிறைவு செய்கின்றது.

$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow \sin 2c = 0 \Rightarrow 2c = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \Rightarrow c = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$c = \frac{\pi}{2} \in (0,\pi)$ என்பது ரோலின் தேற்றத்தின் நிபந்தனைக்கு கட்டுப்படுகின்ற மதிப்பாகும்.

(v) $f(x) = e^x \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$

e^x மற்றும் $\sin x$ என்பன xஇன் எல்லா மதிப்புகளுக்குத் தொடர்ச்சி உடையது. எனவே அவற்றின் பெருக்கல் பலன் $e^x \sin x$, $0 \le x \le \pi$இல் தொடர்ச்சியுடையது.

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$, $0 < x < \pi$இல் காணமுடியும்.

$\Rightarrow f(x)$ஆனது $(0,\pi)$இல் வகையிடத்தக்கதாகும்.

$$f(0) = e^0 \sin 0 = 0$$

$$f(\pi) = e^{\pi} \sin \pi = 0$$

$\therefore$ ரோலின் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளை f நிறைவு செய்கிறது.

$f'(c) = 0$ எனும்படி ஒரு உறுப்பு $c \in (0, \pi)$ இருந்தால் $e^c(\sin c + \cos c) = 0$

$\Rightarrow e^c = 0$ அல்லது $\sin c + \cos c = 0$

$e^c = 0 \Rightarrow c = -\infty$ என்பது பொருளற்றது.

$\Rightarrow \sin c = -\cos c \Rightarrow \dfrac{\sin c}{\cos c} = -1 \Rightarrow \tan c = -1 = \tan \dfrac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow c = \dfrac{3\pi}{4}$ என்பது தேவையான மதிப்பாகும்.

(vi) $f(x) = x (x-1) (x-2)$, $0 \leq x \leq 2$,

$[0,2]$இல் f தொடர்ச்சியுடையது மற்றும் $(0,2)$இல் f வகையிடத்தக்கதாகும். $f(0) = 0 = f(2)$

ரோலின் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளை f நிறைவு செய்கிறது.

$$f'(x) = (x-1)(x-2) + x(x-2) + x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$c = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} \in (0,2)$ என்பது ரோலின் தேற்றத்தை நிறைவு செய்ய தேவையான மதிப்புகள் ஆகும்.

குறிப்பு : ரோலின் தேற்றத்தை திருப்திப்படுத்தும் விதமாக 'c'இன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேற்பட்டும் காணப்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.23 : $[0, 2\pi]$ என்ற இடைவெளியில் $y = -1 + \cos x$ என்ற வளைவரைக்கு x-அச்சுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளியை ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கணக்கிடு.

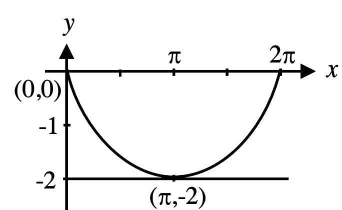
தீர்வு :

$(0,2\pi)$இல் $f(x)$ தொடர்ச்சியானது மற்றும் $[0,2\pi]$இல் வகையிடத்தக்கதாகும்.

$f(0) = 0 = f(2\pi)$ ரோலின் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளை $f(x)$ நிறைவு செய்கிறது.

$f'(x) = -\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$



படம் 5.13

$(0,2\pi)$இல் தேவையான cஇன் மதிப்பு π ஆகும்.

$x = \pi$இல் , $y = -1 + \cos\pi = -2$

$\Rightarrow$ கொடுக்கப்பட்ட வளைவரைக்கு, x-அச்சுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி $(\pi,-2)$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.3

(1) பின்வரும் சார்புகளுக்கு ரோலின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க:

(i) $f(x) = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$

(ii) $f(x) = x^2, \quad 0 \le x \le 1$

(iii) $f(x) = |x-1|, \quad 0 \le x \le 2$

(iv) $f(x) = 4x^3 - 9x, \quad -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}$

(2) ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $y = x^2+1, \quad -2 \le x \le 2$ என்ற வளைவரையில் x–அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் தொடுகோடுகளின் தொடு புள்ளிகளைக் காண்க.

5.6.2 இடைமதிப்புத் தேற்றம் (லெக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்பு விதி) (Mean Value Theorem [Law of the mean due to Lagrange]) :

இந்தப் பகுதியில் பல முடிவுகள் ஜோசப் லூயிஸ் லெக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்பு விதி அல்லது இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைச் சார்ந்தே இருக்கும்.

தேற்றம் : $f(x)$ என்ற மெய்யெண் சார்பு

(i) $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $f(x)$ தொடர்ச்சியாகவும்

(ii) (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருப்பின், (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு cஐ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ எனுமாறு காணமுடியும்} \qquad \ldots(1)$$

கவனக் குறிப்புகள் :

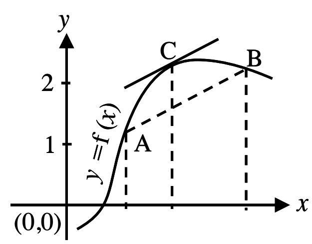
- $f(a)= f(b)$ என இருப்பின் இடைமதிப்பு விதி ரோலின் தேற்றமாகிவிடும்.
- $s = f(t)$ என்ற இயக்கச் சமன்பாட்டையும் இடைநிலை விதியையும் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்போம்.

sஇல் ஏற்படும் மாற்றம் $\Delta s = f(b) - f(a)$ என்பது tஇல் ஏற்படும் மாற்றம் $\Delta t = b - a$ஐ பொறுத்தது.

$\therefore \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. இது $t = a$இலிருந்து $t = b$ வரையிலான சராசரி திசைவேகத்திற்குச் சமம் என்று பொருள்.

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து aக்கும் bக்கும் இடையே உள்ள இடைவெளி நேரத்தில் 'c' என்ற ஏதேனும் ஒரு சமயத்தில் திசைவேகம் $f'(c)$ ஆனது சராசரி திசைவேகத்திற்குச் சமமாகிறது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு சிற்றுந்து 2 மணி நேரத்தில் 180 கி.மீ. செல்லுமானால் அதன் வேகமானி, 90 கி.மீ. அளவினை குறைந்தபட்சம் ஒருமுறையாவது காண்பித்திருக்க வேண்டும்.

◆ ஒரு வளைவரையின் C $(c, f(c))$ என்ற புள்ளியில் சாய்வு $f'(c)$யும், A $(a, f(a))$ மற்றும் B $(b, f(b))$யை இணைக்கும் நாணின் சாய்வு $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$-ம் சமமாக இருக்கும். வடிவக் கணிதவிளக்கத்தின்படி ஒரு சார்பு f ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a,b]$இல் தொடர்ச்சியாகவும், (a, b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருப்பின், குறைந்தபட்சம் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு $c \in (a, b)$இல் வரையப்படும் தொடுகோடு, நாண் ABக்கு இணையாக இருக்கும்.



படம் 5.14

மேற்குறிப்பு (1) : $a < c < b$ என்ற நிபந்தனையை c பூர்த்தி செய்வதால், $(c-a) < (b-a)$ அல்லது $\dfrac{c-a}{b-a}$ $(< 1) = \theta$, (என்க).

$$\text{(அ.து.).} \quad \frac{c-a}{b-a} = \theta \Rightarrow c-a = \theta\,(b-a), \; 0 < \theta < 1.$$

$$\text{ஆகையால்} \quad c = a + \theta\,(b-a)$$

∴ இடைமதிப்பு விதியை

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c) \quad \text{என எழுதலாம்.}$$

$$= (b-a)\, f'[a + \theta\,(b-a)], \; 0 < \theta < 1$$

இது சார்புகளின் தோராயமான மதிப்புகளைக் கண்டறிய உதவுகிறது.

(2) $b - a = h$ என எடுத்துக்கொண்டால், மேலே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் முடிவை $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$, $0 < \theta < 1$ என எழுதலாம்.

(3) $a = x$ எனவும் $h = \Delta x$ எனவும் எடுத்துக் கொண்டால் இடைமதிப்பு விதியானது $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, f'(x + \theta\Delta x)$ என அமையும்.

இங்கு θ ஆனது $0 < \theta < 1$ எனுமாறு இருக்கும்,.

எடுத்துக்காட்டு 5.24 : $f(x) = x^3$ என்ற சார்பிற்கு $[-2,2]$ என்ற இடைவெளியில் லாக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு: f ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாதலால் $[-2, 2]$இல் தொடர்ச்சியாகவும், வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்கும்.

$$f(2) = 2^3 = 8\ ;\ f(-2) = (-2)^3 = -8$$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(c) = 3c^2$$

இடைமதிப்பு விதியின்படி, $c \in (-2, 2)$ஐ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ எனுமாறு காணலாம். $\Rightarrow 3c^2 = \frac{8-(-8)}{4} = 4$

(அ.து.), $c^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

இடைமதிப்புக்குரிய தேவையான 'c'இன் மதிப்புகள் $\frac{2}{\sqrt{3}}$ மற்றும் $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ இரண்டும் $[-2,2]$இல் அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 5.25 :

உருளை வடிவிலான ஒரு உலோகத் துண்டில் உள்ள4 மி.மீ. விட்டமும் 12 மி.மீ. ஆழமும் கொண்ட ஒரு துளையினை மீண்டும் அதிகப்படுத்த அதன் விட்டம் 4.12 மி.மீட்டராக அதிகரிக்கப்படுகிறது. இதன் விளைவாக துளைத்து எடுக்கப்பட்ட உலோகத்தின் தோராய அளவைக் காண்க.

தீர்வு : x மி.மீ. ஆரமும் 12 மி.மீ. ஆழமும் உடைய உருளையின் கன அளவு

$$V = f(x) = 12\pi x^2$$

$\Rightarrow f'(c) = 24\pi c.$

$f(2.06) - f(2)$வைக் கணக்கிட :

இடைமதிப்பு விதியின்படி,

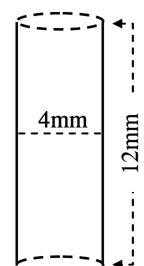
$f(2.06) - f(2) = 0.06\ f'(c)$

$= 0.06\ (24\pi c),\ 2 < c < 2.06$

$c = 2.01$எனக் கொள்க.

$f(2.06) - f(2) = 0.06 \times 24\pi \times 2.01$

$= 2.89\pi$ க. மி.மீ. (தோராயமாக)



படம் 5.15

குறிப்பு : 2.01ஐ தவிர,2இலிருந்து 2.06 வரை வேறு எந்த தகுந்த அளவையும் cக்கு எடுத்துக் கொள்ளலாம். இதற்கு ஏற்றாற்போல வேறு தோராய மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.26 : $f(0) = -3$வும் xஇன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f'(x) \le 5$ எனவும் இருப்பின், $f(2)$இன் மிக அதிக மதிப்பு என்னவாக இருக்கமுடியும்?

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட ஆதாரங்களிலிருந்து, f வகையிடத்தக்கது ஆகையால் f ஆனது xன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியாக இருக்கும். எனவே, [0,2] இடைவெளியில் லெக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்பு விதியைப் பயன்படுத்தலாம். ஏதேனும் ஒரு 'c'$\in(0, 2)$ஐ

$$f(2) - f(0) = f'(c)\ (2 - 0) \text{ எனுமாறு காணலாம்.}$$

$$f(2) = f(0) + 2f'(c)$$

$$= -3 + 2f'(c)$$

xஇன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f'(x) \leq 5$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. குறிப்பாக $f'(c) \leq 5$. இதை இருபுறமும் 2ஆல் பெருக்க

$$2f'(c) \leq 10$$

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7$$

$f(2)$இன் உச்ச மதிப்பு 7 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.27 : ஒரு குளிர் சாதனப் பெட்டியிலிருந்து எடுத்து, கொதிக்கும் நீரில் வைத்த உடன் ஒரு வெப்பமானி $-19°C$இலிருந்து $100°$ ஆக மாற 14 வினாடிகள் எடுத்துக் கொள்கிறது. இடையில் ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில் பாதரசம் சரியாக $8.5°C$/sec. என்ற வீதத்தில் ஏறுகிறது என்று காண்பிக்க.

தீர்வு : ஏதேனும் ஒரு நேரம் tஇல் வெப்பமானி காண்பிக்கும் வெப்ப அளவு T என்க. எனவே, T என்பது, நேரம் tஇன் சார்பாகும். வெப்பத்தின் அளவு தொடர்ச்சியாக மாறிக் கொண்டிருப்பதால் வெப்பம் ஏறுவதும் தொடர்ச்சியானதாகும்.

$\therefore$ இந்தச் சார்பு வகைப்படுத்தக்கூடியதும் ஆகும்.

$\therefore$ இடைமதிப்பு விதியின்படி, (0, 14) என்ற இடைவெளியில் 't_0'என்ற ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில்

$$\frac{T(t_2) - T(t_1)}{t_2 - t_1} = T'(t_0) \text{ என இருந்திருக்க வேண்டும்.}$$

இங்கு $T'(t_0)$ என்பது t_0இல் வெப்பத்தின் மாறு வீதமாகும்.

இங்கு $t_2 - t_1 = 14,\ T(t_2) = 100\ ;\ T(t_1) = -19$

$$T'(t_0) = \frac{100 + 19}{14} = \frac{119}{14} = 8.5C/\text{sec}$$

பயிற்சி 5.4

(1) கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு லாக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவும் :

(i) $f(x) = 1 - x^2$, [0,3] (ii) $f(x) = {}^1/_x$, [1,2]

(iii) $f(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$, [0,2] (iv) $f(x) = x^{2/3}$, [–2,2]

(v) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, [1,3]

(2) $f(1) = 10$ மற்றும் $1 \leq x \leq 4$ என்ற இடைவெளியில் $f'(x) \geq 2$ஆகவும் இருப்பின், $f(4)$இன் மதிப்பு எவ்வளவு சிறியதாக இருக்க முடியும்?

(3) மதியம் 2.00 மணிக்கு ஒரு சிற்றுந்தின் வேகமானி 30 மைல்கள்/மணி எனவும் 2.10 மணிக்கு வேமானி 50 மைல்கள்/மணி எனவும் காட்டுகிறது. 2.00 மணிக்கும் 2.10 மணிக்கும் இடைப்பட்ட ஏதோ ஒரு சமயத்தில் முடுக்கம் சரியாக 120 மைல்கள்/மணி^{2}-ஆக இருந்திருக்கும் எனக் காட்டுக.

பொது வடிவ இடைமதிப்பு விதி (Generalised Law of the Mean) :

மூடிய இடைவெளி $[a,b]$இல் $f(x)$ம் $g(x)$ம் தொடர்ச்சியான மெய்யெண் சார்புகளாகவும், திறந்த இடைவெளி (a,b)இல் fம் gம் வகைப்படுத்தக் கூடியதாகவும் மேலும் திறந்த இடைவெளி (a,b)இல் $g'(x) \neq 0$ எனவும் இருப்பின், இடைவெளி (a, b)இல் குறைந்தபட்சம் xஇன் மதிப்பு cக்கு $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ என இருக்கும்.

மேற்குறிப்புகள் :

(1) இந்தத் தேற்றம் கோஷியின் (Cauchy) பொதுவடிவ இடைமதிப்பு விதி எனப்படும்.

(2) கோஷியின் பொதுவடிவ இடைமதிப்பு விதியின் ஒரு குறிப்பிட்ட வடிவமே லாக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்பு விதியாகும்.

(3) $g(b) \neq g(a)$ என்பதைக் கவனிக்கவும். $g(b) = g(a)$ஆக இருப்பின் ரோலின் தேற்றத்தின்படி, (a,b)இல் ஏதேனும் ஒரு xக்கு $g'(x) = 0$ என ஆகிவிடும். இது பொது வடிவ இடைமதிப்பு விதிக்கு முரணாக அமையும்.

நீட்டித்த இடைமதிப்பு விதி (Extended Law of the mean) :

$f(x)$ம் அதன் முதல் $(n - 1)$ வகைக் கெழுக்களும் மூடிய இடைவெளி $[a,b]$இல் தொடர்ச்சியாகவும், மேலும் $f^{(n)}(x)$ ஆனது திறந்த இடைவெளி (a,b)இல் காணத்தக்கதாகவும் இருப்பின், குறைந்தபட்சம் xஇன் ஒரு மதிப்பு $x = c \in (a,b)$ஐ

$$f(b)=f(a)+ \frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+...+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n ...(1)$$

எனுமாறு காணமுடியும்.

மேற்குறிப்புகள் :

(1) நீட்டித்த இடைமதிப்பு விதியில் $b - a = h$ எனில் $b = a + h$ ஆகும். எனவே (1)இல் பிரதியீடு செய்ய,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\ h + \frac{f''(a)}{2!}\ h^2 + \ldots \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\ h^n \quad \ldots(2)$$

இங்கு $c \in (a, a+h)$. மேலும் இதனை டெய்லரின் தேற்றம் என்கிறோம்.

(2) bக்குப் பதிலாக x என்ற மாறியைப் பொருத்த (1) ஆனது ஏதேனும் ஒரு $c \in (a, x)$க்கு

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\ (x-a) + \ldots \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

என மாறும்.

(3) fஐ எத்தனை முறை வேண்டுமானாலும் வகைப்படுத்த முடியுமென்க. டெய்லரின் தேற்றத்தில் n மிகவும் பெரிய எண்ணாக இருக்கையில் (அ.து.) $n \to \infty$ எனில் (2) ஆனது.

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\ h + \frac{f''(a)}{2!}\ h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ h^n + \ldots \quad \ldots(3)$$ ஆகும்.

aஐ பொறுத்த $f(a+h)$இன் இந்த விரிவானது டெய்லரின் தொடர் என அழைக்கப்படுகிறது.

(4) நீட்டித்த இடைமதிப்பு விதியில் aக்குப் பதில் 0வையும், bக்குப் பதில் மாறி xஐயும் பொருத்த (1) என்பது,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!}\ x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\ x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\ x^n$$

ஆகும். இங்கு $c \in (0,x)$ இது மெக்லாரின் (Maclaurin) தேற்றம் எனஅழைக்கப்படுகிறது.

(5) மெக்லாரின் தேற்றத்தில் n மிகப் பெரிய எண்ணாக இருக்கையில் (அ.து.) $n \to \infty$ எனில் தொடரானது

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!}\ x^2 + \ldots\ldots$$ என ஆகும்.

இத்தொடர் விரிவினை மெக்லாரின் தொடர் என அழைப்பர்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு : $x = \frac{\pi}{2}$-ல் $f(x) = \sin x$இன் டெய்லரின் விரிவு பின்வருமாறு கிடைக்கப் பெறுகிறது :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$f'(x) = \cos x \quad ; \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f''(x) = -\sin x \quad ; \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad ; \quad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\therefore\ f(x) = \sin x = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \ldots$$

$$= 1 + 0\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(-1)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \ldots$$

$$\sin x = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \ldots$$

எடுத்துக்காட்டு 5.28 : *கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு மெக்லாரின் விரிவு காண்க :*

1) e^x 2) $\log_e(1 + x)$ 3) arc tan x *அல்லது* $\tan^{-1}x$

தீர்வு :

(1)

$$f(x) = e^x \quad ; \quad f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad ; \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad ; \quad f''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{1 \,.\, x}{1!} + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$ (xஇன் எல்லா மதிப்பிற்கும் உண்மை)

(2) $f(x) = \log_e(1 + x) : f(0) = \log_e 1 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} \quad ; f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1 + x)^2} \quad ; f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{+1.2}{(1 + x)^3} \quad ; f'''(0) = 2!$$

$$f''''(x) = \frac{-1.2.3}{(1 + x)^4} \quad ; f''''(0) = -(3!)$$

$$f(x) = \log_e(1 + x) = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 - \ldots + \ldots.$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots. \quad -1 < x \le 1.$$

(3) $f(x) = \tan^{-1}x \quad ; \quad f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots ; \; f'(0) = 1 = 1!$$

$$f''(x) = -2x + 4x^3 - 6x^5 \ldots ; \; f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -2 + 12x^2 - 30x^4 \ldots ; \; f'''(0) = -2 = -(2!)$$

$$f^{iv}(x) = 24x - 120x^3 \ldots ; \; f^{iv}(0) = 0$$

$$f^{v}(x) = 24 - 360x^2 \ldots ; \; f^{v}(0) = 24 = 4!$$

$$\tan^{-1} x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{4!}{5!}x^5 + \ldots$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots$$

இங்கு $|x| \leq 1$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.5

கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு மெக்லாரின் விரிவு காண்க:

(1) e^{2x} (2) $\cos^2 x$ (3) $\frac{1}{1+x}$ (4) $\tan x, \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

5.7 தேறப்பெறாத வடிவங்களின் மதிப்பு காணல் (Evaluating Indeterminate forms) :

மூடிய இடைவெளி $[a,b]$இல் $f(x)$, $g(x)$ என்பவை வரையறுக்கப்பட்டு, கோஷியின் (Cauchy) பொது வடிவ இடைமதிப்பு விதியை நிறைவேற்றுவதாகவும் இருக்கட்டும். மேலும் $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ எனில் $\frac{f(x)}{g(x)}$ என்ற விகிதம் $x = a$ என்ற இடத்தில் வரையறுக்கப்பட இயலாது. ஏனெனில் இது $\frac{0}{0}$ வடிவத்தில் அமைவதால் அர்த்தமற்றதாகிறது. ஆனால் $x \neq a$ எனுமாறு இருக்கும் மதிப்புகளுக்கு, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ஆனது வரையறுத்த மதிப்பு பெற்றுள்ளது.

$x \to a$ எனில் இவ்விகிதத்தின் எல்லையைக் காண்பதை, $\frac{0}{0}$ எனுமாறு அமைந்த தேறப்பெறாத வடிவினைக் கணக்கிடுதல் என்பதாகும்.

$f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 9x + 7$ என்றும் இருப்பின், $x \to \infty$ எனில் பகுதியும் தொகுதியும் ∞ ஆவதால் $\frac{3x-2}{9x+7}$ என்பது $\frac{\infty}{\infty}$ என்ற தேறப்பெறாத வடிவில் அமைகிறது.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} (x - e^x)$, $\lim\limits_{x\to 0} x^x$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$ மேலும் $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$

ஆகியவை தேறப்பெறாத வடிவங்களான முறையே $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 மற்றும் 1^∞ என்பனவற்றை அடைகின்றன. இந்தக் குறியீடுகளை நேரடி வடிவில் எடுத்துக் கொள்ள முடியாது. குறிப்பிட்ட எல்லைகளின் போக்கை வேறுபடுத்தி அறிவதற்கு இந்த குறியீடுகள் அவசியமாகிறது. இந்த எல்லையினை கணக்கிட, ஜான் பெர்னோலியால் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட ஒரு முடிவு பயன்படுகிறது. அதாவது., ஒரு பின்னத்தின் பகுதியும், தொகுதியும் பூச்சியத்தை நோக்கிச் செல்லும் போது, விகிதத்தின் எல்லையினைக் காணலாம்.. இதை தற்காலத்தில் லோபிதால் விதி என்று கணித மேதை Guillaume Francois Antoinede *l*'Hôpitalஇன் பெயரில் அழைக்கிறோம்.

***லோபிதால் விதி* (l'Hôpital's rule) :**

மூடிய இடைவெளி $[a,b]$இல் fம் gம் தொடர்ச்சியாகவும் $c \in (a,b)$இல் f வகையிடத்தக்கதாகவும் $g'(c) \neq 0$ எனவும் இருக்கட்டும். $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ என்க. மேலும் $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$ என இருந்தால் $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ ஆகும்.

***மேற்குறிப்புகள்* :**

(1) வழக்கமான முறைகளை விட லோபிதால் முறை தேறப்பெறாத வடிவங்களின் எல்லையைக் காண எளிதாக அமைகிறது. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் எல்லை நமக்கு 1 என்று தெரியும். இதனை வடிவக் கணித முறையில் நிரூபித்தோம். இம்முறை சற்று கடினமானதொரு முறையாகும்.

ஆனால், $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$ என எளிதாக லோபிதாலின் விதியால் நிரூபிக்க முடிகிறது.

(2) வகைப்படுத்தக்கூடிய சார்புகளுக்குத்தான் தேறப் பெறாத வடிவங்களுக்கு லோபிதாலின் விதியைப் பயன்படுத்த முடியும். $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{3}$. ஆனால் லோபிதால் விதியைப் பயன்படுத்தினால் $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{1} = 1$ ஆகிறது. இங்கு $f(x) = x + 1$ $g(x) = x + 3$ இரண்டும் வகைக்கெழு காணத் தக்கவை. ஆனால் தேறப்பெறாத வடிவத்தில் இல்லை.

(3) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ மற்றும் $\lim_{x\to a} g(x) = 0$விற்குப் பதில் $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ மற்றும் $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ என்று இருப்பினும் லோபிதாலின் விதியினை பயன்படுத்தலாம்.

(4) மற்ற தேறப்பெறாத வடிவங்களையும் தகுந்த உருமாற்றங்களைப் பயன்படுத்தி $\frac{0}{0}$ மற்றும் $\frac{\infty}{\infty}$ என்ற அமைப்பில் கொண்டு வரலாம்.

சில கணக்குகளைச் செய்வதற்கு கீழ்க்கண்ட முடிவு தேவைப்படும்.

***சேர்ப்புச் சார்புத் தேற்றம்* (Composite Function Theorem) :**

தேற்றம் : $\lim_{x\to a} g(x) = b$ மற்றும் bஇல் f தொடர்ச்சியாகவும் இருப்பின்,

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.29 : மதிப்பு காண்க : $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$

தீர்வு : $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \frac{0}{0}$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 5.30 : $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\tan^{-1}\frac{1}{x}}$ -ன் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு : $y = \frac{1}{x}$ என்க. $x \to \infty$ எனில் $y \to 0$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\tan^{-1}\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\tan^{-1} y} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{y\to 0} \left[\frac{\cos y}{\frac{1}{1+y^2}}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 5.31 : $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\log(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$

தீர்வு : இது $\frac{0}{0}$ அமைப்பிலுள்ளது.

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\log(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{2(\pi - 2x) \times (-2)}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cot x}{-4(\pi - 2x)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{-4 \times -2} = \frac{-1}{8}$$

இங்கு லோபிதாலின் விதி இருமுறை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது என்பதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.32 : மதிப்பு காண்க : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$

தீர்வு : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$ என்பது $\frac{\infty}{\infty}$ அமைப்பில் உள்ளது.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 5.33 : மதிப்பு காண்க : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}\right)$

தீர்வு : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}\right)$ என்பது $\infty - \infty$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

$$\therefore \lim_{x \to 0} \left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 5.34 : மதிப்பு காண்க : $\lim\limits_{x \to 0} (\cot x)^{\sin x}$

தீர்வு : $\lim\limits_{x \to 0} (\cot x)^{\sin x}$ என்பது ∞^0 என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

$$y = (\cot x)^{\sin x} \text{ என்க} \Rightarrow \log y = \sin x \log (\cot x)$$

$$\lim_{x \to 0} (\log y) = \lim_{x \to 0} \sin x \ \log (\cot x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\log (\cot x)}{\operatorname{cosec} x}$$. இது $\frac{\infty}{\infty}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

லோபிதாலின் விதியைப் பயன்படுத்த,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log (\cot x)}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cot x}(-\operatorname{cosec}^2 x)}{-\operatorname{cosec} x \cot x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

(அ.து.) $\lim_{x \to 0} \log y = 0$

சேர்ப்புச் சார்புத் தேற்றத்தின்படி,

$$0 = \lim_{x \to 0} \log y = \log \left(\lim_{x \to 0} y \right) \Rightarrow \lim_{x \to 0} y = e^0 = 1$$

எச்சரிக்கை : $\lim_{x \to a} f(x)$ தெரியாத நிலையில், $\log \left\{ \lim_{x \to a} f(x) \right\}$ என்பது அர்த்தமற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 5.35 : மதிப்பு காண் $\lim_{x \to 0+} x^{\sin x}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to 0+} x^{\sin x}$ என்பது 0^0 என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

$$y = x^{\sin x} \text{ என்க} \Rightarrow \log y = \sin x \log x.$$

(அ.து.), $\log y = \frac{\log x}{\operatorname{cosec} x}$

$$\lim_{x \to 0+} \log y = \lim_{x \to 0+} \frac{\log x}{\operatorname{cosec} x}$$. இது $\frac{-\infty}{\infty}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

லோபிதாலின் விதியைப் பயன்படுத்த,

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cot x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2\sin x\cos x}{x\sin x - \cos x} = 0$$

(அ.து.), $\lim_{x\to 0+} \log y = 0$

சேர்ப்புச் சார்புத் தேற்றத்தின்படி,

$$0 = \lim_{x\to 0+} \log y = \log \lim_{x\to 0+} y \Rightarrow \lim_{x\to 0+} y = e^0 = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 5.36 :

t என்ற நேரத்தில், R என்ற மின்தடையினையும், L என்ற தூண்டு மின்னோட்டத்தினையும், மேலும் E என்ற மாறா மின் இயக்கு விசையினையும் கொண்ட மின்சாரம் i-இன் சமன்பாடு $i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$ எனில், R மிகச் சிறியதாக இருக்கும் போது i-ஐ காண உகந்த சூத்திரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\lim_{R\to 0} i = \lim_{R\to 0} \frac{E\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)}{R} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ அமைப்பில் உள்ளது}\right)$$

$$= \lim_{R\to 0} \frac{E \times \frac{t}{L}\ e^{\frac{-Rt}{L}}}{1} = \frac{Et}{L} \Rightarrow \lim_{R\to 0} i = \frac{Et}{L}$$ *உகந்த சூத்திரமாகும்.*

பயிற்சி 5.6

கீழ்க்கண்டவற்றிக்கு எல்லைக் காண்க.

(1) $\lim_{x\to 2} \frac{\sin \pi x}{2 - x}$ (2) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$ (4) $\lim_{x\to 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2}$

(5) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{1/x}$ (6) $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

(7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log_e x}{x}$ (8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cot x}{\cot 2x}$

(9) $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 \log_e x.$ (10) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(11) $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} (\tan x)^{\cos x}$ (12) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$

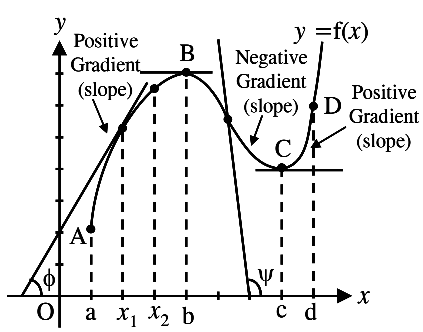
(13) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x}$

5.8 ஓரியல்புச் சார்புகள் (Monotonic Functions) :

ஏறும் (அல்லது பெருகும்), இறங்கும் (அல்லது குறையும்) சார்புகள்

வகை நுண்கணிதத்தில் பலதரப்பட்ட பயன்பாடுகள் உள்ளன. 5.2, 5.3, 5.4 *ஆகிய பகுதிகளில் வகை நுண் வடிவக் கணித, பௌதிக, செய்முறை கணக்குகளுக்கு வகை நுண்கணிதம் பயன்படுத்தப்பட்டதைக் கண்டோம். இந்தப் பகுதியில் வகை நுண்கணிதம் மெய்ச் சார்புகளின் கொள்கைகளில் பயன்படுவதைக் காண்போம்.*

ஒரு வளைவரையை வரையும் போது அது எங்கு அதிகரிக்கிறது எங்கு குறைகிறது என்பது தெரிவது அவசியமாகிறது. படம் 5.16*இல் வளைவரையானது புள்ளி Aலிருந்து Bவரை அதிகரித்தும், Bலிருந்து Cவரை குறைந்தும் மறுபடியும் Cஇலிருந்து D வரை அதிகரித்தும் காண்கிறது.*



படம் 5.16

இடைவெளி $[a,b]$இல் சார்பு f ஆனது ஏறும் சார்பாகவும் இடைவெளி $[b,c]$ இல் இறங்கும் சார்பாகவும் மறுபடி $[c,d]$ இல் ஏறும் சார்பாகவும் காணப்படுகிறது. இதனை ஏறும் சார்பின் வரையறைக்குப் பயன்படுத்துவோம்.

வரையறை : *ஒரு இடைவெளி* I*யில் $x_1 < x_2$ஆக இருக்கும் போது $f(x_1) \leq f(x_2)$எனில்* I*யில் f ஒரு ஏறும் சார்பாகிறது. $x_1 < x_2$ஆக இருக்கும் போது $f(x_1) \geq f(x_2)$ஆக இருப்பின், Iயில் f ஒரு இறங்கும் சார்பாகும். ஒரு இடைவெளி* I*யில் ஒரு சார்பு ஏறுமுகமாகவோ அல்லது இறங்கு முகமாகவோ காணப்பட்டால் அது* I*யில் ஓரியல்பு சார்பு எனப்படும்.*

முதல் நிலையில் சார்பு f ஆனது வரிசை மாற்றா சார்பாகிறது.

(அ.து.), $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

மேலும் இரண்டாவது நிலையில், சார்பு f வரிசையை மாற்றுகிறது. (அ.து.), $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

வரிசை மாற்றா பண்பின்படி, ஏறும் சார்புகள் வரிசை மாறா சார்புகளாகவும், இறங்கும் சார்புகள் வரிசையை மாற்றும் சார்புகளாகவும் அமைகின்றன.

விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) *ஒவ்வொரு மாறிலிச் சார்பும் ஏறும் சார்பாகும்.*

(ii) *ஒவ்வொரு சமனிச் சார்பும் ஏறும் சார்பாகும்.*

(iii) $f(x) = \sin x$ *என்ற சார்பு R இல் ஏறும் சார்பு அல்ல.*

ஆனால் $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *வில் அது ஒரு ஏறும் சார்பாகும்.*

(iv) $f(x) = 4 - 2x$ *இறங்கும் சார்பாகும்.*

(v) $f(x) = \sin x$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ *என்ற இடைவெளியில் இறங்கும் சார்பாகும்.*

f ஏறும் சார்பு எனில், (− f) இறங்கும் சார்பாகும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

ஒவ்வொரு மாறிலிச் சார்பும் ஏறும் சார்பாகவும், இறங்கும் சார்பாகவும் கொள்ளலாம் என்பதை அறிக.

எச்சரிக்கை : *ஒரு சார்பு ஏறும் சார்பாக அமையவில்லையெனில் அதை இறங்கும் சார்பு என்று கூறுவது தவறாகும். ஒரு சார்பு ஏறும் சார்பாகவோ அல்லது இறங்கும் சார்பாகவோ இல்லாமலிருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,* $[0, \pi]$ *என்ற இடைவெளியில்* $\sin x$ *ஏறும் சார்புமல்ல, இறங்கும் சார்பும் அல்ல.* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *வில் அது ஏறும் சார்பாகவும்,* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ *இல் அது இறங்கும் சார்பாகவும் அமைகிறது. சில சார்புகள் இன்னமும் வித்தியாசமாக இருக்கும். அவை இடைவெளியின் உட்பிரிவினிலும் கூட ஓரியல்பு சார்பாக அமைவதில்லை. ஆனால் நாம் பார்க்கும் பெரும்பாலான சார்புகள் அத்துனை மாதிரி அல்ல.*

சாதாரணமாக, வளைவரையைப் பார்த்த உடனேயே அது ஏறும் சார்பா, இறங்கும் சார்பா அல்லது இரண்டும் இல்லையா எனக் கூறிவிடலாம். ஏறும் சார்பின் வளைவரை நாம் இடமிருந்து வலப்பக்கம் செல்லும் போது இறங்குவதில்லை. ஆனால் இறங்கும் சார்பின் வளைவரை இடப்பக்கத்திலிருந்து வலப்பக்கம் செல்லும் போது அது ஏறுவதுமில்லை. ஆனால் வளைவரையே கொடுக்கப்படாத போது நாம் தரப்பட்ட ஓர் சார்பு ஓரியல்புச் சார்பா? இல்லையா? என எப்படி கண்டுபிடிப்பது? இதற்கு தேற்றம் 1 நமக்குத் தேவைப்படுகிறது.

***தேற்றம்* 1 :** I ஒரு திறந்த இடைவெளியாக இருக்கட்டும். $f : I \to R$ வகைப்படுத்துமாறு இருக்கட்டும்.

(i) Iஇல் xஇன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f'(x) \geq 0$ எனில் f ஒரு ஏறும் சார்பாகும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.

(ii) Iஇல் xஇன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f'(x) \leq 0$ எனில் f ஒரு இறங்கும் சார்பாகும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.

***நிரூபணம்*:** (i) f ஏறும் சார்பாகவும், $x \in I$வாகவும் இருக்கட்டும். f வகையிடக் கூடியதால், $f'(x)$ காணத்தக்கது.

மேலும் $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. $h > 0$ எனில், $x + h > x$ மேலும் f ஏறும் சார்பாதலால், $f(x + h) \geq f(x)$. எனவே $f(x + h) - f(x) \geq 0$.

$h < 0$ எனில், $x + h < x$ மற்றும் $f(x + h) \leq f(x)$. எனவே $f(x + h) - f(x) \leq 0$

எனவே $f(x + h) - f(x)$ மற்றும் h இரண்டுமே குறையற்ற மதிப்புடனோ அல்லது இரண்டுமே மிகையற்ற மதிப்புடனோ இருக்கும்.

$\therefore$ hஇன் எல்லா பூச்சியமற்ற மதிப்புகளுக்கும் $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ஒரு குறையற்ற மதிப்புடன் இருக்கும். எனவே, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

மறுதலையாக, Iயில் xஇன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f'(x) \geq 0$வாக இருக்கட்டும். Iயில் $x_1 < x_2$ என இருக்கட்டும். $f(x_1) \leq f(x_2)$ என நிரூபிக்கலாம்.

இடைமதிப்பு விதியின்படி $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$, இங்கு $x_1 < c < x_2$

$f'(c) \geq 0$ எனவே $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$. மேலும் $x_2 - x_1 > 0$ ($\therefore$ $x_1 < x_2$)

எனவே $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ அல்லது $f(x_1) \leq f(x_2)$.

f ஒரு ஏறும் சார்பாகும்

(ii) மேற்கூறியவாறே நிரூபணம் செய்யலாம். (i)இன் முடிவை $(-f)$க்கு பயன்படுத்தியும் அதனை நிரூபிக்கலாம்.

***வடிவக் கணித விளக்கம்* (Geometrical interpretation) :** மேற்கூறிய தேற்றம், கீழ்க்கண்ட வடிவ நடப்பை வெளிப்படுத்துகிறது. $I = [a,b]$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ ஏறும் சார்பாக இருப்பின், இந்த இடைவெளியில் $y = f(x)$ என்ற சார்பின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வரையப்படும் தொடுகோடு x-அச்சுடன், φ என்ற ஒரு குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. சில புள்ளிகளில் தொடுகோடு கிடைக்கோடாக இருக்கக்கூடும். இருப்பினும், கோணத்தின் tan மதிப்பு குறை எண்ணாக இருக்காது. (படம் 5.16ஐ பார்க்கவும்). எனவே $f'(x) = \tan\varphi \geq 0$. இடைவெளி $[a, b]$யில் $f(x)$ இறங்கும்

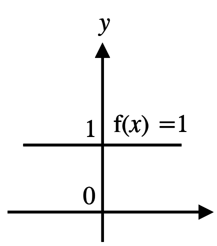
சார்பாக இருப்பின் தொடுகோடு x அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் விரிகோணமாக இருக்கும். சில புள்ளிகளில் தொடுகோடு கிடைக்கோடாக இருக்கும். எவ்வாறாயினும் கோணத்தின் tan *மதிப்பு மிகை எண்ணாக இருக்காது.* $f'(x) = \tan\psi \le 0$

ஏறும் சார்புகளின் தொகுப்பிலிருந்து நாம் திட்டமாக ஏறும் சார்புகளைத் தனிப்படுத்த இயலும். பின்வரும் வரையறை திட்டமாக ஏறும் சார்பின் சரியான அர்த்தத்தைத் தரும்.

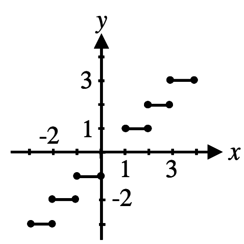
வரையறை : I *என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்படும்* f *என்ற சார்பு,* $x_1 < x_2$ *ஆக இருக்கும் போது* $f(x_1) < f(x_2)$*ஆக இருக்குமானால் அது திட்டமாக ஏறும் சார்பு* (strictly increasing) *எனலாம்.*

இதேப் போன்று, $x_1 < x_2$*ஆக இருக்கும்போது* $f(x_1) > f(x_2)$*ஆக இருக்குமானால் அது திட்டமாக இறங்கும் சார்பு* (strictly decreasing) *எனலாம்.*

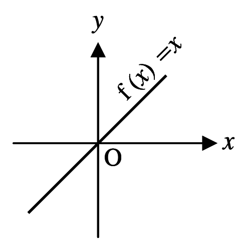
எடுத்துக்காட்டாக, மாறிலி சார்பு திட்டமாக ஏறும் சார்பும் கிடையாது. திட்டமாக இறங்கும் சார்பும் கிடையாது (படம் 5.17). மிகப்பெரிய முழு எண் தரும் சார்பு $f(x)= \lfloor x \rfloor$ *ஏறும் சார்பாகும் ஆனால் (படம் 5.18), திட்டமாக பெருகும் சார்பல்ல. ஆனால்* $f(x) = x$ *என்பது திட்டமாக ஏறும் சார்பாகும். (படம் 5.19).*



படம் 5.17



படம் 5.18



படம் 5.19

தேற்றம் 2 :

(i) I *என்ற இடைவெளியில்* f' *மிகையாக இருக்கட்டும். அவ்வாறாயின்* I*இல்* f *திட்டமாக ஏறும் சார்பாக இருக்கும்.*

(ii) I *என்ற இடைவெளியில்* f' *குறையாக இருக்கட்டும். அவ்வாறாயின்* I*இல்* f *திட்டமாக இறங்கும் சார்பாக இருக்கும்.*

இந்த தேற்றத்தின் நிரூபணம் எளியதாதலால் பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

கிளைத்தேற்றம் : I *என்ற இடைவெளி முழுவதும்* f' *ஒரே குறியுடன் இருக்குமானால்,* f *அந்த இடைவெளியில் ஓரியல்புச் சார்பாக அமையும்.*

தேற்றம் 1க்கும் தேற்றம் 2க்கும் இடையே வித்தியாசம் இருப்பதைக் கவனித்திருப்பீர்கள்.

"f' ஒரு குறையாக இல்லாமலிருந்தால் f ஒரு ஏறும் சார்பாகும். இதன் மறுதலையும் உண்மை"

"$f' > 0$ எனில் f திட்டமாக ஏறும் சார்பாகும்".

தேற்றம் 2ற்கு மறுதலை உண்மையாக இருக்குமா? இல்லை என்பதே விடையாகும். இதனை கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு : $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ என்பதை $f(x) = x^3$ என வரையறு.

$x_1 < x_2$ எனில், $x_2 - x_1 > 0$ மேலும் ${x_1}^2 + {x_2}^2 > 0$

$$\Rightarrow {x_2}^3 - {x_1}^3 = (x_2 - x_1)({x_2}^2 + {x_1}^2 + x_1 x_2)$$

$$= (x_2 - x_1)\frac{1}{2}[({x_1}^2 + {x_2}^2) + (x_1 + x_2)^2] > 0$$

$$\Rightarrow {x_1}^3 < {x_2}^3$$

எனவே $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ ஆகும்.

$\therefore f(x) = x^3$ திட்டமாக ஏறும் சார்பாகும். ஆனால், அதன் வகைக்கெழு $f'(x) = 3x^2$ மற்றும் $f'(0) = 0$. $\therefore f'$ ஆனது முழுமையாக ஒரு மிகை எண்ணாக இல்லாததை அறிக.

குறிப்பு : ஒரு சார்பு ஒரு இடைவெளியின் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் குறியை மாற்றிக் கொண்டே இருப்பின் அந்த இடைவெளியில் அந்தச் சார்பு ஓரியல்புச் சார்பாக இருக்காது. எனவே ஒரு சார்பின் ஓரியல்பற்ற தன்மையை நிரூபிக்க, வெவ்வேறு புள்ளிகளில் f'இன் குறிகள் வெவ்வேறாக இருக்கும் என நிரூபித்தால் போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டு 5.37 : $f(x) = \sin x + \cos 2x$ என்ற சார்பு $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ என்ற இடைவெளியில் ஓரியல்பற்றது என நிரூபிக்க.

தீர்வு : $f(x) = \sin x + \cos 2x$ என்க.

எனவே $f'(x) = \cos x - 2\sin 2x$

$$\therefore f'(0) = \cos 0 - 2\sin 0 = 1 - 0 = 1 > 0$$

மற்றும் $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$

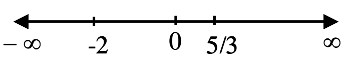
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \times 1 < 0$$

எனவே f'இன் குறிகள் $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ என்ற இடைவெளியில் வெவ்வேறாக இருக்கின்றன. எனவே $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$இடைவெளியில் சார்பு f ஓரியல்பற்றது ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.38 : $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x$ என்ற சார்பின் ஏறும் மற்றும் இறங்கும் இடைவெளிகளைக் காண்க.

தீர்வு : $f'(x) = 6x^2 + 2x - 20 = 2(3x^2 + x - 10) = 2(x + 2)(3x - 5)$

இப்போது $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$, மற்றும் $x = 5/3$. இப்புள்ளிகள் மெய் எண் கோட்டை ($f(x)$இன் அரங்கம்) இடைவெளிகள் $(-\infty, -2)$, $(-2, 5/3)$ மற்றும் $(5/3, \infty)$ எனப் பிரிக்கின்றன.



படம் 5.20

இடைவெளி	$x + 2$	$3x - 5$	$f'(x)$	**ஏறும் / இறங்கும் இடைவெளிகள்**
$-\infty < x < -2$	–	–	+	$(-\infty, -2]$ல் ஏறும்
$-2 < x < 5/3$	+	–	–	$[-2, 5/3]$ல் இறங்கும்
$5/3 < x < \infty$	+	+	+	$[5/3, \infty)$ல் ஏறும்

குறிப்பு : **(1) இடைவெளியில் தீர்வு எண்கள் (மாறுநிலை எண்கள்) (Critical numbers) *சேர்க்கப்படாவிடில், ஏறும் (இறங்கும்) இடைவெளிகள் திட்டமாக ஏறும் (திட்டமாக இறங்கும்) இடைவெளிகளாகின்றன.***

(2) *ஏறும் மற்றும் இறங்கும் சார்புகளின் இடைவெளிகளை பிரிக்கப்பட்ட இடைவெளிகளில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை சோதித்தும் காணலாம்.*

எடுத்துக்காட்டு 5.39 : $f(x) = x^2 - x + 1$ என்ற சார்பு $[0,1]$ இடைவெளியில் ஏறவும் இல்லை, இறங்கவும் இல்லை என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு : $f(x) = x^2 - x + 1$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$x \geq \frac{1}{2}$ க்கு i.e., $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f'(x) \geq 0$

$\therefore \left[\frac{1}{2}, 1\right]$இல் $f(x)$ ஆனது ஏறும் சார்பாகும்.

$x \leq \frac{1}{2}$ க்கு i.e., $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \leq 0$

$f(x)$ ஆனது இடைவெளி $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ல் இறங்கும் சார்பாகும்.

முழு இடைவெளி $[0,1]$இல் $f(x)$ இறங்கும் சார்பும் அல்ல, ஏறும் சார்பும் அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 5.40: $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$இன் ஓரியல்புத் தன்மையை ஆராய்க.

தீர்வு : $f(x) = \sin x$ மற்றும் $f'(x) = \cos x = 0$ எனில் $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \in [0,2\pi]$

இங்கு $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$ என்ற இடைவெளிகளில் $f'(x) \ge 0$

எனவே $f(x) = \sin x$ என்ற சார்பு $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ஆகிய இடைவெளிகளில், அதாவது $\sin x$ சார்பு $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$இல் ஏறும் சார்பு ஆகும்.

மேலும் $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ என்ற இடைவெளியில். $f'(x) \le 0$

$\therefore \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$இல் $\sin x$ ஒரு இறங்கும் சார்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.41 : *xஇன் எம்மதிப்பிற்கு $y = \frac{x-2}{x+1}$, $x \ne -1$ என்ற சார்பு திட்டமாக ஏறும் அல்லது திட்டமாக இறங்கும்?*

தீர்வு :

$$y = \frac{x-2}{x+1}, x \ne -1 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\,1 - (x-2)\,1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \ \forall\ x \ne -1.$$

$\therefore$ R – {–1}இல் y திட்டமாக ஏறும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.42 : *xஇன் எந்த மதிப்பிற்கு $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ என்ற சார்பு ஏறும் மேலும் எந்த மதிப்பிற்கு இறங்கும்? மேலும் எந்தப் புள்ளிகளில் சார்பின் வளைவரைக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் x அச்சுக்கு இணையாக இருககும்?*

தீர்வு : $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, 3$ என்ற புள்ளிகள் மெய்யெண் கோட்டை $(-\infty, 2), (2, 3)\ (3, \infty)$ என்ற இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கின்றன.

இடைவெளி	$x-2$	$x-3$	$f'(x)$	**ஏறும் / இறங்கும் இடைவெளிகள்**
$-\infty < x < 2$	–	–	+	$(-\infty, 2]$ ல் ஏறும்
$2 < x < 3$	+	–	–	$[2, 3]$ ல் இறங்கும்
$3 < x < \infty$	+	+	+	$[3, \infty)$ ல் ஏறும்

x–அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் தொடுகோடுகள் வளைவரையைத் தொடும் புள்ளிகள் $f'(x) = 0$ என்பதிலிருந்து கிடைக்கிறது. (அ.து.), $x = 2, 3$

$f(2) = 29$ *மற்றும்* $f(3) = 28$.

$\therefore$ தேவையான புள்ளிகள் (2, 29) *மற்றும்* (3, 28) *ஆகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 5.43 :

$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x),\ x > 0$ *என்ற சார்பு* $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ *இடைவெளியில் திட்டமாக ஏறும் சார்பு எனக் காண்பிக்க.*

தீர்வு :

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x).$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sin x + \cos x)^2}(\cos x - \sin x) = \frac{\cos x - \sin x}{2 + \sin 2x} > 0$$

ஏனெனில், $0 < x < \frac{\pi}{4}$ *என்ற இடைவெளியில்* $\cos x - \sin x > 0$ *மற்றும்* $2 + \sin 2x > 0$

$\therefore$ *இடைவெளி* $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ *இல்* $f(x)$ *என்பது திட்டமாக ஏறும் சார்பாகும்.*

பயிற்சி 5.7

(1) R*இல்* e^x *திட்டமாக ஏறும் சார்பு என நிரூபிக்க.*

(2) $(0, \infty)$ *இடைவெளியில்* $\log x$ *திட்டமாக ஏறும் சார்பு என நிரூபிக்க.*

(3) *கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளிகளில் கீழ்க்காணும் சார்புகளில், எவை ஏறும் சார்புகள் அல்லது இறங்கும் சார்புகள் என்பதைக் காண்க.*

(i) $[0,2]$*இல்* $x^2 - 1$ (ii) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$*இல்* $2x^2 + 3x$

(iii) $[0,1]$*இல்* e^{-x} (iv) $[-2, -1]$*இல்* $x(x-1)(x+1)$

(v) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$*இல்* $x \sin x$

(4) *கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளிகளில் கீழ்க்காணும் சார்புகள் ஓரியல்பற்றவை என நிரூபிக்கவும்.*

(i) $[-1,0]$*இல்* $2x^2 + x - 5$ (ii) $[0,2]$*இல்* $x(x-1)(x+1)$

(iii) $[0,\pi]$*இல்* $x \sin x$ (iv) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$*இல்* $\tan x + \cot x$

(5) *கீழ்க்காணும் சார்புகளின் ஏறும் அல்லது இறங்கும் இடைவெளிகளைக் காண்க.*

(i) $f(x) = 20 - x - x^2$ (ii) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

(iii) $f(x) = x^3 + x + 1$ (iv) $f(x) = x - 2\sin x\ ;\ [0, 2\pi]$

(v) $f(x) = x + \cos x\ ;\ [0, \pi]$ (vi) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x\ ;\ [0, \pi/2]$

அசமன்பாடுகள் (Inequalities) :

எடுத்துக்காட்டு 5.44 :

எல்லா $x > 0$*-க்கும்* $e^x > 1 + x$ *என நிரூபிக்கவும்.*

தீர்வு : $f(x) = e^x - x - 1$ *என்க.*

$x > 0$ *எனில்* $f'(x) = e^x - 1 > 0$

(அ.து.), $f(x)$ *திட்டமாக ஏறும் சார்பாகும்.*

$\therefore$ $x > 0$*விற்கு* $f(x) > f(0)$

(அ.து.), $(e^x - x - 1) > (e^0 - 0 - 1) \Rightarrow e^x > x + 1$

எடுத்துக்காட்டு 5.45 : $x > 0$ *வாகவும்,* $n > 1$ *எனவும் இருப்பின்* $(1 + x)^n > 1+nx$ *என நிரூபிக்கவும்.*

தீர்வு : $f(x) = (1 + x)^n - (1 + nx)$ *என எடுத்துக் கொள்ளவும்.*

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n$$
$$= n[(1 + x)^{n-1} - 1]$$

$x > 0$ *மற்றும்* $n - 1 > 0$ *என்பதால்,* $(1 + x)^{n-1} > 1$, *எனவே* $f'(x) > 0$.

$\therefore$ $[0, \infty)$*யில்* f *திட்டமாக ஏறும் சார்பாகும்.*

எனவே $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$ i.e., $(1 + x)^n - (1 + nx) > (1 + 0) - (1 + 0)$

i.e., $(1 + x)^n - (1 + nx) > 0$

i.e., $(1 + x)^n > (1 + nx)$

எடுத்துக்காட்டு 5.46 : $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$*வில்* $\sin x < x < \tan x$ *என நிரூபிக்கவும்.*

தீர்வு : $f(x) = x - \sin x$ *என்க.*

$0 < x < \frac{\pi}{2}$*ல்* $f'(x) = 1 - \cos x > 0$

$\therefore$ f *திட்டமாக ஏறும் சார்பாகும்.*

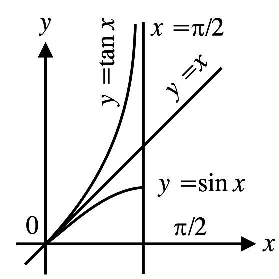
$x > 0$*விற்கு,* $f(x) > f(0)$

$\Rightarrow x - \sin x > 0 \Rightarrow x > \sin x$ … (1)

$g(x) = \tan x - x$ *என்க.*

$g'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-ல் $\tan^2 x > 0$



படம் 5.21

$\therefore$ g *திட்டமாக ஏறும் சார்பாகும்.*

$x > 0$*விற்கு* $f(x) > f(0) \Rightarrow \tan x - x > 0 \Rightarrow \tan x > x$ … (2)

(1)*மற்றும்* (2)*இலிருந்து* $\sin x < x < \tan x$*ஆகும்.*

பயிற்சி 5.8

(1) கீழ்க்காணும் அசமன்பாடுகளை நிரூபிக்க :

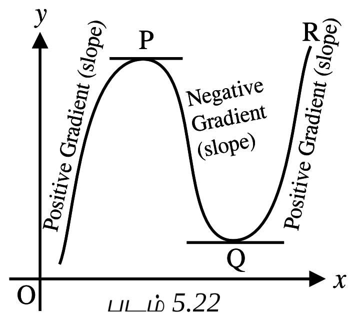
(i) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2},\ x > 0$ (ii) $\sin x > x - \frac{x^3}{6},\ x > 0$

(iii) $\tan^{-1} x < x\ \ \forall x > 0$ (iv) $\log (1 + x) < x\ \ \forall\ x > 0.$

5.9 பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளும் அவற்றின் பயன்பாடுகளும் (Maximum and Minimum values and their applications) :

"For since the fabric of the Universe is most perfect and the work of a most wise creator, nothing at all takes place in the Universe in which some rule of maximum or minimum does not appear" ***Leonard Euler***

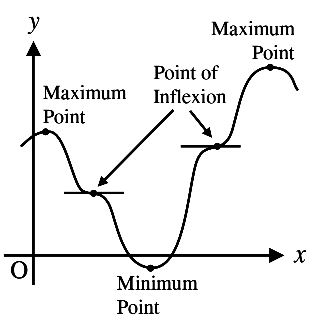
வகை நுண்கணிதத்தின் சில முக்கிய பயன்பாடுகளாவன உகமக் கணக்குகளாகும். இத்தகைய கணக்கு ஒவ்வொன்றிலும் நாம் ஒரு செயலை சிறந்த முறையில் செய்வதற்கான வழியைக் காண வேண்டியுள்ளது. பல நிலைகளிலும் இத்தகைய கணக்குகள் சார்புகளின் பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்பவையாக மாற்றப்படலாம்.



படம் 5.22

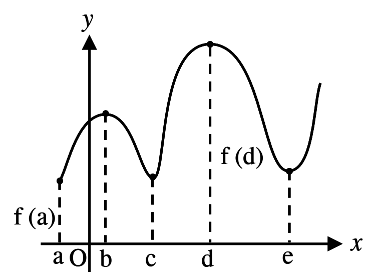
முதலில் நாம் பெருமமதிப்பு மற்றும் சிறும மதிப்பு என்பதைப் பற்றி தெளிவாக விளக்குவோம்.

படம் 5.22இல் காட்டப்பட்டுள்ள வளைவரையின் சாய்வானது Oக்கும் Pக்கும் இடையில் மிகையாகவும், Pக்கும் Qக்கும் இடையில் குறையாகவும் மீண்டும் Qக்கும் Rக்கும் இடையில் மிகையாகவும் மாறிக்கொண்டே செல்கிறது. மேலும் Pஇல் அதன் சாய்வு பூச்சியமாகும். x அதிகரிக்கும் போது, வளைவரையின் சாய்வானது Pக்கு முன்பாக மிகையாகவும் சற்று பின்பாக குறையாகவும் மாறுகிறது. அப்புள்ளியையே பெரும புள்ளி என்கிறோம். மேலும் அது ஒரு ***அலையின் சிகரம் போல்*** அமைந்துள்ளதைக் காண்கிறோம்.



படம் 5.23

புள்ளி Qஇல் சாய்வு பூச்சியமாகும். மேலும் x அதிகரிக்கும்போது வளைவரையின் சாய்வானது Qக்கு சற்று முன்பு குறையாகவும் சற்று பின்பு மிகையாகவும் மாறுகிறது. அப்புள்ளியை சிறுமப் புள்ளி என்கிறோம். மேலும் அது ஒரு ***பள்ளத்தாக்கின் அடிப்பாகம்*** போல் காணப்படுகிறது.



படம் 5.24

P மற்றும் Q புள்ளிகள் நிலை மாற்றுப் புள்ளிகள் (turning points) என பொதுவாக அழைக்கப்படுகின்றன.

இரு பக்கங்களிலும் ஒரே மாதிரியான சாய்வுகளைக் கொண்ட நிலை மாற்றுப் புள்ளியும் சாத்தியமாகும். படம் 5.23இல் காட்டப்பட்டுள்ள அப்புள்ளி வளைவு மாற்றுப்புள்ளி (point of inflection) என்ற சிறப்புப் பெயரைப் பெற்றுள்ளது.

வரையறை **:** D என்பது fஇன் சார்பகம் என்க. Dயிலுள்ள அனைத்து xக்கும் $f(c) \geq f(x)$ எனில் fஆனது cஇல் மீப்பெரு பெருமம் (absolute maximum) பெற்றுள்ளது என்பர். $f(c)$ என்ற எண் Dஇல் fஇன் மீப்பெரு பெரும மதிப்பாகும். அதே போல் Dயிலுள்ள அனைத்து xக்கும் $f(c) \leq f(x)$ எனில், f ஆனது cஇல் மீச்சிறு சிறுமம் (absolute minimum) பெற்றுள்ளது என்பர். மேலும் $f(c)$ என்ற எண் Dஇல் f இன் மீச்சிறு சிறும மதிப்பாகும். fஇன் பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைfஇன் முகட்டு மதிப்புகள் என்கிறோம்.

படம் 5.24இல் காட்டப்பட்டுள்ள சார்பு fஇன் வரைபடம் மூலம் 'மீப்பெரு பெருமம்' dஇலும், 'மீச்சிறு சிறுமம்'aஇலும் இருப்பதைக் காட்டுகிறது. வரைபடத்தில் $(d, f(d))$ உயர்ந்த புள்ளி மற்றும் $(a, f(a))$ தாழ்ந்த புள்ளி என்பதைக் காண்க.

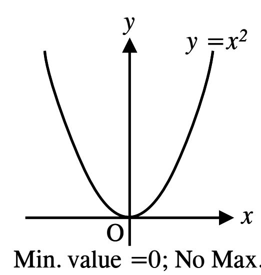
படம் 5.24இல், நாம் bக்கு அருகேயுள்ளxஇன் மதிப்புகளை மட்டுமே எடுத்துக் கொள்வோம். நம் கவனத்தை இடைவெளி (a,c)இல் மட்டுமே கட்டுப்படுத்திக் கொண்டால் $f(b)$இன் மதிப்பு மற்ற $f(x)$இன் மதிப்புகளைக் காட்டிலும் பெரியதாக இருக்கின்றது. மேலும் அதனை fஇன் இடஞ்சார்ந்த பெரும மதிப்பு (local maximum) என்கிறோம். அதே போல் $f(c)$யை fஇன் இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு (local minimum) என்கிறோம். ஏனெனில் இடைவெளி (b,d)இல் அதாவது cக்கு அருகேயுள்ள எல்லா xக்கும் $f(c) \leq f(x)$ ஆகும். f ஆனது eஇலும் இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பைப் பெற்றுள்ளது. இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் மற்றும் பெருமத்தின் வரையறை பின்வருமாறு**:**

வரையறை : *ஒரு சார்பு f ஆனது cஇல் இடஞ்சார்ந்த பெருமம் (அல்லது பெருமம்) பெற்றிருக்க cயை உள்ளடக்கிய ஒரு திறந்த இடைவெளி Iயை Iஇலுள்ள எல்லா xக்கும் $f(c) \geq f(x)$ எனக் காணமுடிதல் வேண்டும். இதே போல், fஆனது cஇல் இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் பெற்றிருப்பின், cஐ உள்ளடக்கிய ஒரு இடைவெளி Iயை, Iஇலுள்ள எல்லா xக்கும் $f(c) \leq f(x)$ எனுமாறு காண முடிதல் வேண்டும்.*

விளக்க எடுத்துக்காட்டு :

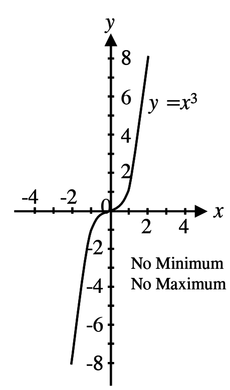
(1) $f(x)=\cos x$ என்ற சார்பு (இடஞ்சார்ந்த மற்றும் மீப்பெரு) பெரும மதிப்பு 1ஐ எண்ணிக்கையற்ற தடவைகள் பெறுகின்றது. ஏனெனில் எந்த ஒரு முழு எண் x க்கும் $\cos 2n\pi = 1$ ஆகும். மேலும் எல்லா xக்கும் $-1 \leq \cos x \leq 1$. அதே போல $\cos (2n + 1)\pi = -1$ என்பது அதன் (இடஞ்சார்ந்த மற்றும் மீச்சிறு) சிறும மதிப்பு ஆகும்.

(2) $f(x) = x^2$ எனில், $f(x) \geq f(0)$. ஏனெனில் எல்லா x க்கும் $x^2 \geq 0$ ஆதலால் $f(0) = 0$ என்பது fஇன் மீச்சிறு (மற்றும் இடஞ்சார்ந்த) சிறும மதிப்பாகும். இது பரவளையம் $y = x^2$இன் அடிப்புள்ளி ஆதி என்ற உண்மைக்குப் பொருத்தம் ஆகும். எவ்வாறாயினும் பரவளையத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளி என்பது கிடையாது. எனவே இச்சார்புக்கு பெரும மதிப்பு கிடையாது. படம் 5.25ஐ காண்க.



படம் 5.25

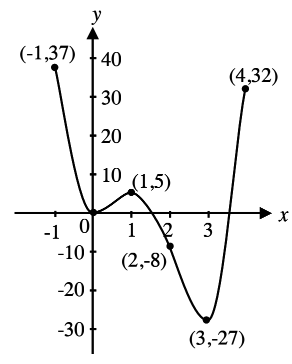
(3) $f(x) = x^3$ என்ற சார்பின் வரைபடம் படம்5.26இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதில் இச்சார்பு மீப்பெரும் பெரும மதிப்போ அல்லது மீச்சிறு சிறும மதிப்போ பெறவில்லை எனக் காண்கிறோம். உண்மையில் இது எந்தவொரு இடஞ்சார்ந்த முகட்டு மதிப்பையும் பெறவில்லை.



படம் 5.26

(4) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$; $-1 \le x \le 4$. என்ற சார்பை கருத்தில் கொள்வோம். இதன் வரைபடம் படம் 5.27இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இதில் $f(1) = 5$ என்பது ஒரு இடஞ்சார்ந்த பெருமம் என்று இருக்க $f(-1)=37$ஒரு மீப்பெரு பெருமமாக அமைகின்றது. மேலும் $f(0) = 0$ என்பது இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் எனவும் $f(3)= -27$ என்பது இடஞ்சார்ந்த மற்றும் மீச்சிறு சிறுமமாக அமைகிறது.



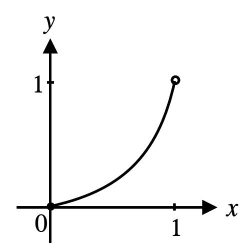
படம் 5.27

சில சார்புகள் முகட்டு மதிப்புகளைக் கொண்டதாகவும் மற்றும் சில இல்லாததாகவும் உள்ளதை மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் பார்த்தோம். பின்வரும் தேற்றமானது ஒரு சார்பு முகட்டு மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகளைத் தருகின்றது.

முகட்டு மதிப்புத் தேற்றம் : f என்ற சார்பானது மூடிய இடைவெளி $[a,b]$இல் தொடர்ச்சியாக இருந்தால் அவ்விடைவெளி $[a,b]$இல் c மற்றும் d என்னும் ஏதேனும் எண்களுக்கு f ஆனது $f(c)$ என்னும் ஒரு மீப்பெரு பெரும மதிப்பையும் மற்றும் $f(d)$ என்னும் ஒரு மீச்சிறு சிறும மதிப்பையும் அடைகிறது.

முகட்டு மதிப்பு தேற்றத்தில் அடிப்படை கோட்பாடுகளில் (தொடர்ச்சி அல்லது மூடிய இடைவெளி) ஏதேனும் ஒன்று விடுபட்டாலும் சார்பானது முகட்டு மதிப்பை பெறுவதில்லை என்பதனை அடுத்து வரும் இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளால் அறியலாம்.

(5) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ , \ 0 \le x < 1 \\ 0 \ \ , \ 1 \le x \le 2 \end{cases}$ என்ற சார்பை கருத்தில் கொள்க. இச்சார்பு, மூடிய இடைவெளி $[0,2]$இல் வரையறுக்கப்பட்டு உள்ளது. ஆனால் அதற்கு பெரும மதிப்பு இல்லை. f இன் வீச்சகம் என்பது இடைவெளி $[0,1)$ என்பதை கவனிக்க. அச்சார்பானது 1 க்கு முன்னால் உள்ள மதிப்புகளை பெறுகின்றது. ஆனால் 1 ஐ பெறுவதில்லை.

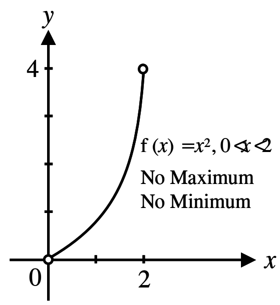


படம் 5.28

இது ஏனெனில், fஇன் தொடர்ச்சிதன்மை $x = 1$இல் இல்லை.

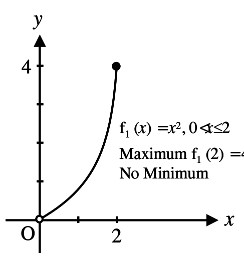
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2) = 1 \ ; \ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

(6) $f(x) = x^2$, $0 < x < 2$ என்ற சார்பானது இடைவெளி (0,2)இல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது. ஆனால் அது பெரும மதிப்பையோ அல்லது சிறும மதிப்பையோ பெறுவதில்லை. fஇன் வீச்சகம் (0,4)இல் உள்ளது. 0 மற்றும் 4 என்ற மதிப்புகளை f பெறுவதில்லை. இது இடைவெளி (0,2) மூடியதாக இல்லாமல் இருப்பதே காரணமாகும்.

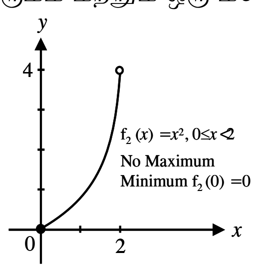


படம் 5.29

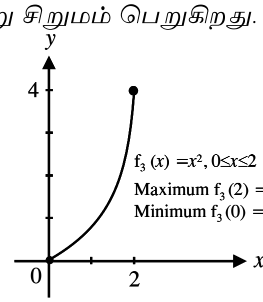
கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் இடைவெளி (0,2)இன் ஏதேனும் ஒரு முடிவுப் புள்ளியைச் சேர்ப்பதன் மூலம் படம் 5.30, படம் 5.31, படம் 5.32இல் காட்டப்பட்டது போல ஏதேனும் ஒரு நிலை பெறலாம். குறிப்பாக சார்பு $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 2$ மூடிய இடைவெளி [0,2]இல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது. ஆதலால் முகட்டு மதிப்புத் தேற்றத்தின்படி சார்பானது மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் ஒரு மீச்சிறு சிறுமம் பெறுகிறது.



படம் 5.30



படம் 5.31



படம் 5.32

மேலே பல எடுத்துக்காட்டுகள் காட்டப்பட்டிருந்தாலும் சில சார்புகள் தொடர்ச்சியாக மற்றும் வகையிடத்தக்கதாக இல்லாது இருந்தாலும் அவை சிறும மற்றும் பெரும மதிப்புகளை அடைகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக,

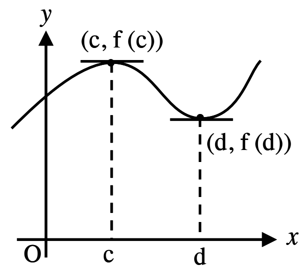
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ஒரு விகிதமுறா எண்} \\ 0, & x \text{ ஒரு விகிதமுறு எண்} \end{cases}$$

(இச்சார்பு விகிதமுறா எண்களின் சிறப்புச் சார்பு என அழைக்கப்படும்)

இச்சார்பு எந்தவொரு புள்ளியிலும் வகையிடத்தக்கதல்ல. மேலும் எந்தவொரு புள்ளியிலும் அது தொடர்ச்சியற்றதாக உள்ளது. ஆனால் இதன் பெரும மதிப்பு 1 மற்றும் சிறும மதிப்பு 0 ஆகும்.

தொடர்ச்சியான சார்பு ஒன்று மூடிய இடைவெளியில் ஒரு பெரும மதிப்பு மற்றும் சிறும மதிப்பை பெறுகிறது என முகட்டு மதிப்புத் தேற்றம் கூறுகிறது. ஆனால் அவற்றின் முகட்டு மதிப்புகளை எவ்வாறு பெறுவது என அது கூறவில்லை.

படம் 5.33இல் சார்பு fஇன் வரைபடத்தில் cஇல் ஒரு இடஞ்சார்ந்த பெருமத்தையும் மற்றும் dஇல் ஒரு இடஞ்சார்ந்த சிறுமத்தையும் பெற்றுள்ளதைக் காட்டுகிறது. மேலும் பெரும புள்ளி மற்றும் சிறும புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு கிடைமட்டமாக உள்ளது.



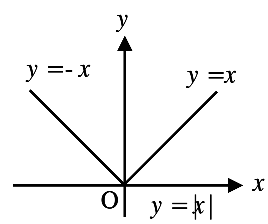
படம் 5.33

ஆதலால் அதன் சாய்வு பூச்சியமாகும். ஆகவேதான் $f'(c) = 0$ மற்றும் $f'(d) = 0$ என்பதாகக் காண்கிறோம்.

∴**பெர்மெட் (Fermat) தேற்றம் :** f ஆனது cஇல் இடஞ்சார்ந்த முகட்டு மதிப்பு (பெருமம் அல்லது சிறுமம்) பெற்றிருந்து $f'(c)$ வரையறுக்கப்பட்டு இருந்தால் $f'(c) = 0$ ஆகும்.

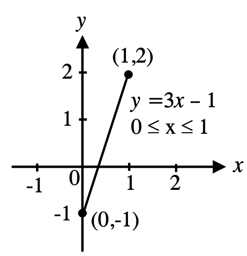
$f'(x) = 0$ எனக் கொண்டு xக்கு தீர்வு காண்பதன் மூலம் முகட்டு மதிப்புகளை காண இயலாது.

(7) $f(x) = |x|$ என்ற சார்பு 0வில் (இடஞ்சார்ந்த மற்றும் மீச்சிறு) சிறும மதிப்பு பெற்றுள்ளது. ஆனால் அம்மதிப்பை $f'(x)=0$ எனக் கொள்வதால் பெற இயலாது. ஏனெனில் $f'(x)$ அப்புள்ளியில் வரையறுக்கப்படவில்லை.



படம் 5.34

(8) $f(x) = 3x - 1,\ 0 \le x \le 1$ என்ற சார்பு $x = 1$இல் பெரும மதிப்பை பெற்று உள்ளது. ஆனால் $f'(1) = 3 \neq 0$. ஆனால் இது ஃபெர்மெட் தேற்றத்திற்கு முரண்பாடு அல்ல. ஏனெனில் $f(1) = 2$ ஒரு இடஞ்சார்ந்த பெருமம் அல்ல. ஏனெனில் f இன் சார்பகத்தில் 1ஐ உள்ளடக்கிய திறந்த இடைவெளியைக் காண முடியாது.



படம் 5.35

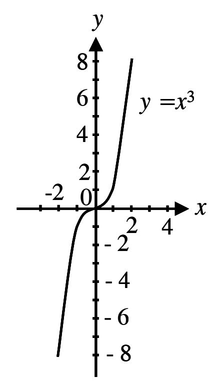
மேற்குறிப்பு : $f'(c) = 0$ எனும் போது cஇல் பெருமம் அல்லது சிறுமம் இல்லாமல் இருக்கலாம். மேலும் $f'(c) \neq 0$ அல்லது $f'(c)$ வரையறுக்கப்படவில்லை, எனினும் அங்கே முகட்டு மதிப்புகள் காணப்படலாம் என்பதை மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் அறிகிறோம்.

(9) $f(x) = x^3$ எனில் $f'(x) = 3x^2$,

ஆதலால் $f'(0) = 0$.

ஆனால் அதன் வரைபடத்தில் fக்கு 0வில் பெருமமோ அல்லது சிறுமமோ அமையவில்லை. ($x > 0$விற்கு $x^3 > 0$ என்றும் $x < 0$விற்கு $x^3 < 0$ என்றும் காண்க).

$f'(0) = 0$ என்னும் கூற்றானது வளைவரை $y = x^3$க்கு (0,0)வில் ஒரு கிடைமட்டத் தொடு கோடு அமைந்துள்ளது என்பதையே குறிக்கின்றது. (0, 0)வில் பெருமம் அல்லது சிறுமம் பெறுவதற்குப் பதிலாக கிடைமட்டத் தொடுகோடு வளைவரையின் குறுக்கே கடந்து செல்கிறது.



படம் 5.36

$f'(c) = 0$ அல்லது $f'(c)$ வரையறுக்கப்படாத புள்ளி cஇல் fஇன் முகட்டு மதிப்புகளைக் காணத் தொடங்கலாம் என்று ஃபெர்மெட் தேற்றம் மறைமுகமாகக் கூறுகின்றது.

வரையறை : ஒரு சார்பு fஇன் சார்பகத்தில் c என்ற எண்ணானது $f'(c) = 0$ ஆகவோ அல்லது $f'(c)$ காண முடியாதவாறோ இருப்பின், cஐ மாறுநிலை (critical number) எண் என்பர்.

நிலை எண்கள் (stationary numbers) என்பவை f இன் சார்பகத்தில் $f'(c) = 0$ எனுமாறு உள்ள c என்கிற மாறுநிலை எண்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.47 : $x^{3/5}\,(4 - x)$இன் மாறுநிலை எண்களைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$$

$$f'(x) = \frac{12}{5}x^{-2/5} - \frac{8}{5}x^{3/5}$$

$$= \frac{4}{5}x^{-2/5}\,(3 - 2x)$$

$f'(x) = 0$ எனில் $3 - 2x = 0$ (அ.து.), $x = \frac{3}{2}$ ஆகும். $f'(x)$ ஆனது $x = 0$இல் வரையறுக்கப்படவில்லை. ஆகவே மாறுநிலை எண்கள் 0, $\frac{3}{2}$ ஆகும்.

fக்கு cஇல் ஒரு இடஞ்சார்ந்த முகடு இருப்பின், cயும் ஒரு மாறுநிலை எண்ணாகும். ஆனால் அதன் மறுதலை உண்மையல்ல.

ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு fக்கு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் மீப்பெரு பெருமம் அல்லது மீச்சிறு சிறுமம் காண்பதற்கு

(1) (a,b)இல் fஇன் மாறுநிலை எண்களுக்கு fஇன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(2) $f(a)$ மற்றும் $f(b)$இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

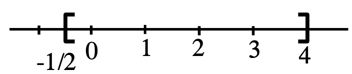
(3) படிகள் 1 மற்றும் 2இல் கண்ட மதிப்புகளில் மிகப்பெரிய மதிப்பு மீப்பெரு பெரும மதிப்பாகும். மிகச் சிறிய மதிப்பு மீச்சிறு சிறும மதிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.48 : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1\ ,\ -\frac{1}{2} \le x \le 4$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மீச்சிறு சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : f ஆனது $\left[-\frac{1}{2}\ , 4\right]$ இல் தொடர்ச்சியாக உள்ளதைக் காண்க.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x\,(x-2)$$



படம் 5.37

xஇன் எல்லா மதிப்புகளுக்கு $f'(x)$ஐ காண முடிவதால், fஇன் மாறுநிலை எண்கள் $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ மட்டுமே ஆகும்.

இவ்விரு மாறுநிலை எண்களும் இடைவெளி $\left[-\frac{1}{2}\ , 4\right]$இல் இருப்பதால், இவ்வெண்களில் fஇன் மதிப்பு $f(0)=1$ மற்றும் $f(2) = -3$ ஆகும்.

இடைவெளியின் முடிவுப் புள்ளிகளில் fஇன் மதிப்பு

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{8}$$

மற்றும் $f(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 + 1 = 17$

இந்நான்கு எண்களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும் போது மீப்பெரு பெருமத்தின் மதிப்பு $f(4) = 17$ மற்றும் மீச்சிறு சிறுமத்தின் மதிப்பு $f(2) = -3$ ஆகும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் மீப்பெரு பெருமம் இடைவெளியின் முடிவுப் புள்ளியில் அமைந்துள்ளதைக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.48(a): $f(x)=x - 2\sin x,\ \ 0 \le x \le 2\pi$ என்பதன் மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மீச்சிறு சிறுமம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு : $f(x) = x - 2\sin x$, $[0, 2\pi]$இல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது

$$f'(x) = 1 - 2\cos x$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ அல்லது $\frac{5\pi}{3}$

மாறுநிலைப் புள்ளிகளில் fஇன் மதிப்பு

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3}$$

$$= \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$$

$$\approx 6.968039$$

இடைவெளியின் முடிவுப் புள்ளிகளில் fஇன் மதிப்பு $f(0) = 0$ மற்றும் $f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$

இந்நான்கு எண்களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும் போது மீச்சிறு சிறுமம் என்பது $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ ஆகும். மற்றும் மீப்பெரு பெருமம் என்பது $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$. இந்த எடுத்துக்காட்டில் மீச்சிறு சிறுமம், மீப்பெரு பெருமம் இரண்டும் மாறுநிலைப் புள்ளிகளில் அமைந்துள்ளது.

ஒரு சார்பின் வளைவுப் போக்கினையும் (சார்பின் வரைபடத்தில்) மற்றும் உகமக் கணக்குகளை (optimization problems) தீர்வு காண்பதிலும் இரண்டாம் வரிசை வகைக் கெழுக்கள் எந்த அளவு உதவுகின்றன என்பதை இங்கு காண்போம்.

இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சோதனை : cயை உள்ளடக்கிய ஒரு திறந்த இடைவெளியில் f தொடர்ச்சியாக இருப்பதாகக் கொள்வோம்***:***

(a) $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) > 0$ எனில் cஇல் f ஒரு இடஞ்சார்ந்த சிறுமத்தைப் பெற்றுள்ளது.

(b) $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) < 0$ எனில் cஇல் f ஒரு இடஞ்சார்ந்த பெருமத்தைப் பெற்றுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 5.49: வளைவரை $y = x^4 - 4x^3$இன் முகட்டு மதிப்புகளை ஆராய்க.

தீர்வு :

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2, \quad f''(x) = 12x^2 - 24x$$

மாறுநிலைப் புள்ளிகளைக் காண்பதற்கு நாம் $f'(x) = 0$ எனக் கொண்டால் $x = 0$ மற்றும் $x = 3$ எனப் பெறுகிறோம். இங்கு இரண்டாம் வகைக்கெழுச் சோதனையை பயன்படுத்த, மாறுநிலைப் புள்ளிகளில் f''இன் குறியைக் காண்க.

$f''(0) = 0$, $f''(3) = 36 > 0$, $f'(3) = 0$ மற்றும் $f''(3) > 0$ என்பதால் $f(3) = -27$ என்பது ஒரு இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பாகும். மேலும்

அப்புள்ளி (3, –27) ஒரு சிறுமப் புள்ளியாகும். $f''(0) = 0$ என்பதால் இரண்டாம் வகைக்கெழுச் சோதனையானது 0 என்ற மாறுநிலைப் புள்ளியைப் பற்றி எந்த விவரமும் தருவதில்லை. மேலும் $x < 0$ மற்றும் $0 < x < 3$ என்றாலும் $f'(x) < 0$ஆக இருப்பதால் முதல் வகைக்கெழுச் சோதனையானது fக்கு 0வில் இடஞ்சார்ந்த முகவெட்டு மதிப்புகள் இல்லை எனக் கூறுகிறது.

மேற்கூறிய அனைத்தையும் பின்வருமாறு தொகுத்து அறியலாம் :

நிலைப் புள்ளிகளைக் (Stationary point) காண்பதற்கும் அவற்றை வேறுபடுத்தி காண்பதற்குமான வழிமுறைகள்

(i) $y = f(x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் $\frac{dy}{dx}$ஐக் காண்க. (அ.து. $f'(x)$)

(ii) $\frac{dy}{dx} = 0$ என்க. மேலும் நிலைப் புள்ளிகள் xஐ காண்க.

(iii) xஇன் மதிப்புகளை தரப்பட்ட சார்பு $y = f(x)$இல் பிரதியிட்டு ஒத்த yஇன் மதிப்புகளைக் காண்க. இது நிலைப் புள்ளிகள் ஆயத் தொலைவுகளைத் தருகின்றன.

நிலைப் புள்ளியின் தன்மையை காண்பதற்கு

(iv) $\frac{d^2y}{dx^2}$ஐ காண்க. அதில் (ii)இல் கண்ட xஇன் மதிப்புகளைப் பிரதியிடுக.

இதன் விளைவாக,

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}$ மிகையெனில் - புள்ளி ஒரு சிறுமம் ஆகும்.

(b) $\frac{d^2y}{dx^2}$ குறையெனில் - புள்ளி ஒரு பெருமம் ஆகும்.

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}$ பூச்சியம் எனில் முகட்டுப் புள்ளி (பெருமம் அல்லது சிறுமம்) ஆக இருக்காது.

அல்லது

(v) *சாய்வின் குறியைக் கண்டறிக. (வளைவரையின் சாய்வு* $f'(x)$*ஐ நிலைப் புள்ளியின் சற்று முன்பாகவும் சற்று பின்பாகவும்) வளைவரையின் சாய்வின் குறி*

(a) *மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாறினால் - புள்ளி ஒரு பெருமப் புள்ளி ஆகும்.*

(b) *குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறினால் - புள்ளி ஒரு சிறுமப் புள்ளி ஆகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 5.50 : $y = 3x^2 - 6x$ *என்ற வளைவரையின் முகட்டுப் புள்ளிகளைக் காண்க மற்றும் இரு பக்கமும் உள்ள சாய்வின் குறியைக் கொண்டு அதன் தன்மையை ஆராய்ந்து அறிக.*

தீர்வு : *மேற்கண்ட செய்முறையைப் பின்பற்றுவோம்.*

(i) $y = 3x^2 - 6x$ *என்பதால்* $\frac{dy}{dx} = 6x - 6$

(ii) *நிலைப்புள்ளியில்* $\frac{dy}{dx} = 0$ *எனவே* $x = 1$

(iii) $x = 1$ *எனில்* $y = 3(1)^2 - 6(1) = -3$. *எனவே நிலைப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகள்* $(1, -3)$.

x *ஆனது* 1*ஐ விட சற்றே குறைவாக இருந்தால் அதாவது* 0.9 *என்க.* $\frac{dy}{dx} = 6(0.9) - 6 = -0.6 < 0$.

x *ஆனது* 1*ஐ விட சற்றே அதிகமாக இருந்தால் அதாவது* 1.1 *என்க.* $\frac{dy}{dx} = 6(1.1) - 6 = 0.6 > 0$.

வளைவரையின் சரிவானது குறையிலிருந்து மிகைக்கு குறி மாறுவதால் $(1, -3)$ *ஒரு சிறுமப் புள்ளி ஆகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 5.51 :

$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$*இன் இடஞ்சார்ந்த பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.*

தீர்வு :

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$

நிலைப் புள்ளியில் $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$

$$(x-1)^2(4x-1) = 0 \Rightarrow x = 1,\ 1,\ \frac{1}{4}$$

$x = 1$ எனில் $f(1) = 0$ மேலும் $x = \frac{1}{4}$ எனில், $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-27}{256}$

எனவே நிலைப்புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகள் $(1, 0)$ மற்றும் $\left(\frac{1}{4}, \frac{-27}{256}\right)$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 6$$
$$= 6(2x^2 - 3x + 1)$$
$$= 6(x - 1)(2x - 1)$$

$x = 1$ எனில் $f''(1) = 0$. எனவே இரண்டாம் வகைக்கெழுச் சோதனையானது $x = 1$இல் fஇன் முகட்டுத் தன்மையை பற்றி எந்த விவரமும் தருவதில்லை.

$x = \frac{1}{4}$ எனில் $f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4} > 0$. எனவே $\left(\frac{1}{4}, \frac{-27}{256}\right)$ ஒரு சிறுமப் புள்ளியாகும்.

இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு $\frac{-27}{256}$ ஆகும்.

எச்சரிக்கை: எந்தவொரு சார்பும் கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியின் முடிவுப் புள்ளிகளில் இடஞ்சார்ந்த பெரும/சிறும மதிப்புகளை அடைவதில்லை.

பயிற்சி 5.9

(1) பின்வரும் சார்புகளுக்கு மாறுநிலை எண்கள் மற்றும் நிலைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

(i) $f(x) = 2x - 3x^2$ (ii) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

(iii) $f(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$ (iv) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

(v) $f(\theta) = \sin^2 2\theta$; $[0, \pi]$ (vi) $f(\theta) = \theta + \sin\theta$; $[0, 2\pi]$

(2) கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளிகளுக்கு fஇன் மீப்பெரு பெரும மற்றும் மீச்சிறு சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $f(x) = x^2 - 2x + 2,\quad [0,3]$

(ii) $f(x) = 1 - 2x - x^2,\quad [-4,1]$

(iii) $f(x) = x^3 - 12x + 1,\quad [-3,5]$

(iv) $f(x) = \sqrt{9 - x^2},\quad [-1,2]$

(v) $f(x) = \frac{x}{x + 1},\quad [1,2]$

(vi) $f(x) = \sin x + \cos x,\quad \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

(vii) $f(x) = x - 2\cos x,\quad [-\pi, \pi]$

(3) பின்வரும் சார்புகளுக்கு இடஞ்சார்ந்த பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $x^3 - x$ (ii) $2x^3 + 5x^2 - 4x$

(iii) $x^4 - 6x^2$ (iv) $(x^2 - 1)^3$

(v) $\sin^2 \theta \quad [0, \pi]$ (vi) $t + \cos t$

5.10 பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைச் சார்ந்துள்ள நடைமுறைக் கணக்குகள்

(Practical problems involving maximum and minimum values) :

இப்பகுதியில் முகட்டு மதிப்புகளைக் காண நாம் படித்த முறைகள் நம் வாழ்க்கையின் பல பாகங்களிலும் நடைமுறை பயன்பாடுகளைப் பெற்றுள்ளது. ஒரு வியாபாரி செலவை சிறுமப்படுத்தவும் லாபத்தை பெருமப்படுத்தவும் வேண்டியுள்ளது. நாமும் சில கணக்குகளில் பரப்பளவு, கொள்ளளவு, இலாபம் இவற்றின் பெரும அளவையும் மற்றும் தூரம், நேரம், செலவு இவற்றின் சிறும அளவையும் காண வேண்டியுள்ளது. இந்நடைமுறை கணக்குகளை தீர்ப்பதிலுள்ள மிகப் பெரிய சாதனையானது, அவற்றை பெருமம் மற்றும் சிறுமக் கணக்குகளாக மாற்றி அதாவது ஒரு சார்பினை அமைத்து அதனை பெரும அல்லது சிறுமப்படுத்த வேண்டும்.

சில அடிப்படை உண்மைகளை சூழ்நிலைக்குத் தக்கவாறு கையாண்டு கணக்குகளைத் தீர்க்கும் உத்திகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(1) **கணக்கை புரிந்துக் கொள்ளுதல் :** கணக்கை கவனமாக படித்தறிவது, காணவேண்டியது என்ன என்று கண்டு கொள்வது, என்ன என்ன அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்பதை அறிய கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகள் என்ன என்பதை தெரிந்துக் கொள்ளுதல்.

(2) **படம் வரைக :** பெரும்பாலான கணக்குகளுக்கு படம் வரைவது தேவையானதாகும். மேலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மற்றும் தேவையான அளவுகள் என்ன என்பதை படத்தின் மூலம் அறிந்து கொள்ள முடியும்.

(3) **குறியீடுகளை பயன்படுத்துதல் :** பெரும அல்லது குறும மதிப்புகளை காண வேண்டிய அளவிற்கு குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துக. Q போன்ற குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தலாம். மேலும் காணப்பட வேண்டிய மற்ற அளவுகளுக்கும் குறியீடுகளை $(a,b,c \ldots,x, y, z)$ தேர்ந்தெடுத்து படத்திலும் அக்குறியீடுகளை பயன்படுத்துக. முதல் எழுத்துகளை குறியீடாகப் பயன்படுத்துவது மேலும் பயன் தரும். எடுத்துக்காட்டாக பரப்பளவிற்கு A, உயரத்திற்கு h, நேரத்திற்கு t என்பனவாகும்.

(4) 3இல் குறிப்பிட்டது போல் Qவை மற்ற குறியீடுகளின் வாயிலாக எழுதவும்.

(5) 4இல் குறிப்பிட்டது போல் Qவை ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட மாறிகள் வாயிலாக எழுதப்பட்டிருந்தால் கொடுக்கப்பட்டுள்ளவிவரங்களின்படி அம்மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு (சமன்பாட்டு வடிவில்) காணவேண்டும். இச்சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி காணப்பட வேண்டிய ஒரு மாறியைத் தவிர மற்ற மாறிகளை நீக்க வேண்டும். ஆகவே Q ஆனது x என்ற ஒரு மாறியைக் கொண்ட ஒரு சமன்பாடாக இருக்கும். (அ.து.), $Q = f(x)$. இச்சார்பின் சார்பகத்தை எழுதவும்.

(6) fஇன் பெருமம் அல்லது சிறுமம் காண மேற்சொன்ன முறைகளைக் கையாளவும்.

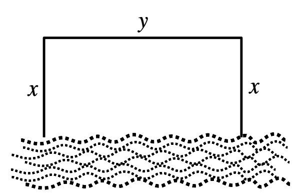
குறிப்பு : *(1) சார்பகம் ஒரு மூடிய இடைவெளியாக இருப்பின் மீப்பெரு பெருமம்/மீச்சிறு சிறுமம் கோட்பாட்டினை நேரடியாக பயன்படுத்தலாம். (பார்க்க எ.கா. 5.52, 5.58).*

(2) சார்பகம் ஒரு திறந்த இடைவெளியாக இருப்பின் இடஞ்சார்ந்த பெரும/ சிறும மதிப்புகளைக் காண முதல் (பார்க்க 5.53) அல்லது இரண்டாம் வகைக்கெழுச் சோதனையை பயன்படுத்தலாம். முதல் வகைக்கெழு சோதனைக்குப் பதிலாக இரண்டாம் வகைக்கெழுச் சோதனயையும் (கிடைக்குமானால்) இரண்டாம் வகைக்கெழுச் சோதனைக்குப் பதிலாக முதல் வகைக்கெழுச் சோதனையையும் பயன்படுத்தலாம்.

(3) எவ்வாறாயினும் கடைசியாக நாம் அடைவது மீப்பெரு பெருமம்/ மீச்சிறு சிறும மதிப்பின் அடிப்படையிலேயே தீர்வு காண்கிறோம் என்பதனை கவனத்தில் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டு 5.52 : ஒரு விவசாயி செவ்வக வடிவமான வயலுக்கு வேலியிட வேண்டியுள்ளது. அவ்வயலின் ஒரு பக்கத்தில் ஆறு ஒன்று நேர்க்கோட்டில் ஓடுகிறது. அப்பக்கத்திற்கு வேலி தேவையில்லை. அவர் 2400 அடிக்கு வேலியிட கருதியுள்ளார். அவ்வகையில் பெரும பரப்பளவு கொள்ளுமாறு உள்ள நீள, அகல அளவுகள் என்ன?

தீர்வு : இங்கு நாம் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு Aஇன் பெரும மதிப்பு காண வேண்டி உள்ளது. செவ்வகத்தின் அகலம் மற்றும் நீளத்தை xமற்றும் y (அடியில்) என்க. Aவை x மற்றும் yஇன் வாயிலாக எழுதவும். (அ.து.), $A = xy$



படம் 5.38

Aவை ஒரே ஒரு மாறி கொண்ட சார்பாக எழுத வேண்டும். ஆதலால் yயை xஇன் வாயிலாக எழுதி நீக்கவும். இதைச் செய்வதற்கு, வேலியிட வேண்டியுள்ள மொத்த நீளம் 2400 அடி என்ற விவரத்தைப் பயன்படுத்தவும். ஆகவே $2x + y = 2400$

$\therefore\ y = 2400 - 2x$

பரப்பு $A = x\,(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$

இங்கு $x \geq 0$ மற்றும் $x \leq 1200$ (இல்லையெனில் $A < 0$). ஆதலால் நாம் பெருமம் காண வேண்டிய சார்பு

$A(x) = 2400x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1200.$

$A'(x) = 2400 - 4x$, ஆகவே மாறுநிலை எண்ணை காண்பதற்கு, நாம் $2400 - 4x = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண வேண்டும். $x = 600$ என்பது தீர்வாகும். Aவின் பெருமம் மாறுநிலைப் புள்ளிகளில் அல்லது இடைவெளியின் எல்லை புள்ளிகளில் அமையும்.

$A(0) = 0$, $A(600) = 7{,}20{,}000$ மற்றும் $A(1200) = 0$

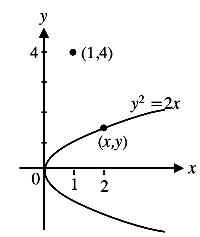
ஆகவே பெரும மதிப்பு A (600) = 720,000.

$x = 600$ எனில் $y = 2400 - 1200 = 1200$

ஆதலால் செவ்வக வடிவ வயலின் அகலம் 600 அடி, நீளம் 1200 அடியாகும்.

குறிப்பு : இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையைப் பயன்படுத்தியும் (இடஞ்சார்ந்த) இக்கணக்கினை தீர்க்கலாம். இப்போது $x > 0$. $y > 0$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.53 : பரவளையம் $y^2 = 2x$ மீது (1,4) என்ற புள்ளிக்கு மிக அருகிலுள்ள புள்ளியைக் காண்க.



படம் 5.39

தீர்வு : $y^2=2x$ என்ற பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளியை (x,y) என்க. (1,4) மற்றும் (x,y) புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம்

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}\ .$$

(x,y) என்ற புள்ளி $y^2 = 2x$ மீதுள்ளதால்

$\Rightarrow x = y^2/2$, எனவே $d^2 = f(y) = (y^2/2 - 1)^2 + (y-4)^2$

(dஇன் சிறுமம் நிகழும் அதே புள்ளியில்தான் d^2இன் சிறுமம் நிகழும் என்பதைக் காண்க)

$$f'(y) = 2\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)(y) + 2(y-4) = y^3 - 8\ .$$

மாறுநிலைப் புள்ளியில், $y^3 - 8 = 0 \Rightarrow y = 2$

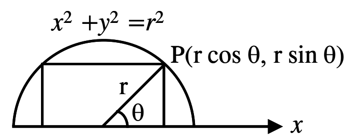
$y < 2$எனில் $f'(y) < 0$, மேலும் $y > 2$ எனில் $f'(y) > 0$ என்பதைக் காண்க. எனவே மீச்சிறு சிறுமம் காண முதலாம் வகைக்கெழுச் சோதனையின்படி $y = 2$இல் சிறுமம் நிகழ்கிறது. அதற்கு ஒத்த xஇன் மதிப்பு ஆனது $x = \frac{y^2}{2} = 2$. எனவே $y^2 = 2x$ மீது (1,4) என்ற புள்ளிக்கு மிக அருகில் அமைந்துள்ள புள்ளி (2,2) ஆகும்.

குறிப்பு : இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையைப் பயன்படுத்தியும் (இடஞ்சார்ந்த) இக்கணக்கினை தீர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.54 : r ஆரமுள்ள அரைவட்டத்தினுள் பெரும அளவு கொள்ளுமாறு வரையப்படும் செவ்வகத்தின் பரப்பு காண்க.

தீர்வு :

OP ஆனது x–அச்சின் மிகைத் திசையுடன் உண்டாக்கும் கோணம் θ என்க.



படம் 5.40

செவ்வகத்தின் பரப்பு A என்பது

$A(\theta) = (2\,r\cos\theta)\,(r\sin\theta)$

$= r^2\, 2\sin\theta\,\cos\theta = r^2\sin 2\theta$

$\sin 2\theta$ பெருமம் எனில் $A(\theta)$ பெருமம் ஆகும்.

$\sin 2\theta$ வின் பெரும மதிப்பு $= 1 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$ அல்லது $\theta = \frac{\pi}{4}$.

($\theta = \frac{\pi}{4}$ எனில் $A'(\theta) = 0$ என்பதைக் காண்க)

எனவே மாறுநிலை எண் $\frac{\pi}{4}$ ஆகும். ஆகவே பரப்பு $A\left(\frac{\pi}{4}\right) = r^2$.

குறிப்பு : அரைவட்டத்தினுள் பெரும அளவு கொள்ளுமாறு வரையப்படும் செவ்வகத்தின் நீள அகலங்கள் முறையே $\sqrt{2}r$, $\frac{r}{\sqrt{2}}$ ஆகும்.

மாற்றுமுறை : $A'(\theta) = 2r^2\cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$; $\theta = \frac{\pi}{4}$

$A''(\theta) = -4r^2 \sin 2\theta < 0$, for $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ஆனது பெருமப் புள்ளியைத் தருகின்றது. மேலும் பெருமப் புள்ளி $\left(\frac{\pi}{4}, r^2\right)$ ஆகும்.

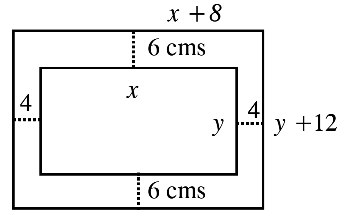
குறிப்பு : மேற்கண்ட கணக்கிலிருந்து இயற்கணித முறையைக் காட்டிலும் வகைக்கெழு முறையில் வேகமாக தீர்வு காணமுடியும் என்பதை நாம் அறிந்துக் கொள்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.55 : ஒரு சுவரொட்டியின் மேல் மற்றும் அடியின் ஓரங்கள் 6 செ.மீ மற்றும அதன் பக்க ஓரங்கள் 4 செ.மீ. ஆகும். அச்சுவரொட்டியில் அச்சடிக்கப்பட்ட வாசகங்களின் பரப்பு 384 செ.மீ^{2} என வரையறுக்கப்பட்டால் அதன் பரப்பு சிறும அளவு கொள்ளுமாறு உள்ள நீள அகலங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

அச்சிடப்பட்ட பகுதியின் நீள அகலங்கள் x மற்றும் y என்க. அதன் பரப்பு $xy = 384$

சுவரொட்டியின் நீள அகலங்கள் முறையே $(x + 8)$ மற்றும் $(y + 12)$ ஆகும்.



படம் 5.41

சுவரொட்டியின் பரப்பு :

$$A = (x + 8)(y + 12)$$
$$= xy + 12x + 8y + 96$$
$$= 12x + 8y + 480$$
$$= 12x + 8\left(\frac{384}{x}\right) + 480$$
$$A' = 12 - 8 \times 384 \times \frac{1}{x^2}$$
$$A'' = 16 \times 384 \times \frac{1}{x^3}$$
$$A' = 0 \Rightarrow x = \pm 16$$

ஆனால் $x > 0$

$\therefore x = 16$

$x = 16$ எனில் $A'' > 0$

$\therefore$ எனவே $x = 16$ ஆக இருக்கும்போது பரப்பு சிறுமம் அடைகிறது.

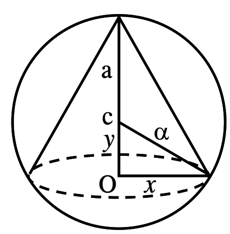
$\therefore y = 24$

$\therefore x + 8 = 24, y + 12 = 36$

சுவரொட்டியின் நீள் அகலங்கள் 24 செ.மீ மற்றும் 36 செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 5.56 : a ஆரமுள்ள கோளத்தினுள் பெரும அளவு கொள்ளுமாறு காணப்படும் கூம்பின் கொள்ளளவு, கோளத்தின் கொள்ளளவின் $\frac{8}{27}$ மடங்கு எனக்காட்டுக.

தீர்வு : கோளத்தின் ஆரம் a என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் கூம்பின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் x என்க. கூம்பின் உயரம் h எனில் அதன் கொள்ளளவு



படம் 5.42

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 h$$
$$= \frac{1}{3}\pi x^2 (a + y) \qquad \ldots(1)$$

(இங்கு OC = y எனில் உயரம் $h = a + y$)

படத்திலிருந்து $x^2 + y^2 = a^2$ (2)

(2)ஐ (1)இல் பயன்படுத்த கிடைப்பது

$$V = \frac{1}{3}\pi (a^2 - y^2)(a + y)$$

பெருமக் கொள்ளளவிற்கு

$$V' = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi [a^2 - 2ay - 3y^2] = 0$$

$$\Rightarrow 3y = +a \text{ அல்லது } y = -a$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{3} \quad [y = -a \text{ சாத்தியமல்ல}]$$

$$y = \frac{a}{3}\text{-ல்} \quad V'' = -\pi \frac{2}{3}(a + 3y) = -\frac{4}{3}\pi a < 0$$

$\therefore\ y = \frac{a}{3}$ எனில் கொள்ளளவு பெருமம் பெற்றிருக்கும். மேலும் பெரும கொள்ளளவு =

$$\frac{1}{3}\pi \times \frac{8a^2}{9}\left(a + \frac{1}{3}a\right) = \frac{8}{27}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{8}{27} \text{ (கோளத்தின் கொள்ளளவு)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.57 : *ஒரு மூடியிட்ட சதுர அடிப்பாகம் கொண்டுள்ள (கனச் செவ்வகத்தின்) பெட்டியின் கொள்ளளவு 2000 க.செ.மீ, அப்பெட்டியின் அடிப்பாகம் மற்றும் மேல் பாகத்திற்கான மூலப் பொருட்களின் விலை ஒரு ச.செ.மீக்கு ரூ. 3 மற்றும் அதன் பக்கங்களுக்கான மூலப் பொருட்களின் விலை ஒரு சதுர செ.மீ.க்கு ரூ. 1.50. மூலப் பொருட்களின் விலை சிறும அளவு கொள்ளுமாறு உள்ள பெட்டியின் நீள அகலங்கள் காண்க.*

தீர்வு : சதுர அடிப்பாகத்தின் பக்கத்தின் நீளம் மற்றும் பெட்டியின் உயரம் முறையே x, y என்க. மூலப் பொருட்களின் விலை C என்க.

அடிப்பாகத்தின் பரப்பு $= x^2$

மேல்பாகத்தின் பரப்பு $= x^2$

மேல்பாகம் மற்றும் அடிப்பாகத்தின் மொத்தப் பரப்பு $= 2x^2$

பிற நான்கு பக்கங்களின் பரப்பு $= 4xy$

மேல்பாகம் மற்றும் அடிப்பாகத்திற்கான மூலப்பொருட்களின் விலை $= 3(2x^2)$

பக்கங்களுக்கான மூலப்பொருட்களின் விலை $= (1.5)(4xy) = 6xy$

மொத்த விலை $C = 6x^2 + 6xy$ …(1)

பெட்டியின் கொள்ளளவு V = (அடிப்பரப்பு) (உயரம்)

$$= x^2y = 2000 \qquad \ldots(2)$$

(1) மற்றும் (2)லிருந்து y-ஐ நீக்குவதால், $C(x) = 6x^2 + \frac{12000}{x}$ …(3)

இங்கு $x > 0$ மேலும் $C(x)$ ஆனது $(0, +\infty)$இல் தொடர்ச்சியானது.

$$C'(x) = 12x - \frac{12000}{x^2}$$

$C'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 12000 = 0 \Rightarrow 12(x^3 - 10^3) = 0$

$\Rightarrow x = 10$ அல்லது $x^2 + 10x + 100 = 0$

$x^2 + 10x + 100 = 0$ சாத்தியமல்ல $\therefore$ மாறுநிலை எண் $x = 10$.

$C''(x) = 12 + \frac{24000}{x^3}$; $C''(10) = 12 + \frac{24000}{1000} > 0$

$\therefore$ $x = 10$ இல் C சிறுமம் ஆகும்

$\therefore$ அடிப்பாகத்தின் நீளம் 10 செ.மீ. ஆகும்.

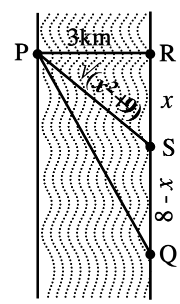
மேலும் உயரம் $y = \frac{2000}{100} = 20$ செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 5.58 : 3கி.மீ. அகலத்தில் நேராக ஓடும் ஆற்றின் ஒரு கரையில் P என்கிற புள்ளியில் ஒருவர் நிற்கின்றார். அவர் நீரோட்ட திசையில், கரையின் எதிர்பக்கம் 8 கி.மீ. தொலைவிலுள்ளQவை நோக்கி வேகமாகச் சென்று அடைய வேண்டியுள்ளது. அவர் படகை நேராக எதிர்த்திசை Rக்கு ஓட்டிச் சென்று அங்கிருந்து Qக்கு ஓடிச்செல்லலாம் அல்லது Qக்கு நேராக படகை ஓட்டிச் செல்லலாம் அல்லது Q மற்றும் Rக்கு இடையேயுள்ள Sக்கு ஓட்டிச் சென்று அங்கிருந்து Qக்கு ஓடிச் செல்லலாம் அவர் படகு ஓட்டிச் செல்லும் வேகம் 6 கி.மீ/மணி, ஓடும் வேகம் 8 கி.மீ/மணி எனில் Qவை வேகமாகச் சென்றடைய அவர் படகை எங்கே கரை சேர்க்க வேண்டும்?

தீர்வு :

R மற்றும் Sக்கிடையேயுள்ள தூரம் x என்க. ஓட வேண்டிய தூரம் $8 - x$ ஆகும். மேலும் தொலைவு $PS = \sqrt{x^2 + 9}$.

நேரம் $= \frac{\text{தொலைவு}}{\text{வேகம்}}$ என்பதை நாம் அறிவோம். எனவே படகு ஓட்டிச் செல்லும் நேரம், $R_t = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ மற்றும் ஓடும் நேரம் $r_t = \frac{(8-x)}{8}$ ஆகும்.



படம் 5.43

எடுத்துக் கொண்ட மொத்த நேரம் $T = R_t + r_t = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{(8-x)}{8}$, $0 \le x \le 8$

இங்கு $x = 0$ எனில் அவன் Rக்கும் $x = 8$எனில் Qக்கும் படகை நேராக ஓட்டிச் செல்லலாம்.

மாறுநிலைப்புள்ளியில்

$$T'(x) = 0 \Rightarrow \quad T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8} = 0$$

$$4x = 3\sqrt{x^2+9}$$

$$16x^2 = 9\,(x^2+9)$$

$$7x^2 = 81$$

$$\Rightarrow \; x = \frac{9}{\sqrt{7}} \quad \text{ஏனெனில் } x = -\frac{9}{\sqrt{7}} \text{ இயலாது}$$

மாறுநிலை எண் $x = \dfrac{9}{\sqrt{7}}$. Tஇன் மதிப்பை முடிவுப் புள்ளிகள் மற்றும் $x = \dfrac{9}{\sqrt{7}}$இல் கணக்கிடக் கிடைப்பது

$$T(0) = 1.5, \quad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33, \text{ மற்றும் } T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

$x = \dfrac{9}{\sqrt{7}}$இல் Tஇன் மதிப்பு மிக குறைந்துள்ளது. எனவே அவர் படகை தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து எதிர் கரையில் ஆற்றின் நீரோட்ட திசையில் $\dfrac{9}{\sqrt{7}}$ கி.மீ (≈ 3.4 கி.மீ) தொலைவில் கரைச் சேர்க்க வேண்டும்.

பயிற்சி 5.10

(1) இரண்டு எண்களின் கூடுதல் 100 அவ்வெண்களின் பெருக்குத் தொகை பெரும மதிப்பாக கிடைக்க அவ்வெண்கள் என்னவாக இருக்க வேண்டும்?

(2) இரண்டு மிகை எண்களின் பெருக்குத் தொகை 100. அவ்வெண்களின் கூடுதல் சிறும மதிப்பாக கிடைக்க அவ்வெண்கள் என்னவாக இருக்க வேண்டும்?

(3) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பரப்பளவினைக் கொண்ட செவ்வகங்களுள் சதுரம் மட்டுமே சிறுமச் சுற்றளவு பெற்றிருக்கும் எனக் காட்டுக.

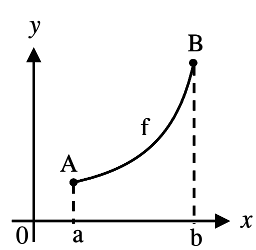
(4) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சுற்றளவினைக் கொண்ட செவ்வகங்களுள் சதுரம் மட்டுமே பெரும பரப்பளவைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டுக.

(5) r ஆரமுள்ள வட்டத்தினுள் வரையப்படும் மிகப் பெரிய பரப்பளவு கொண்ட செவ்வகத்தின் நீள அகலங்கள் என்னவாக இருக்கும்?

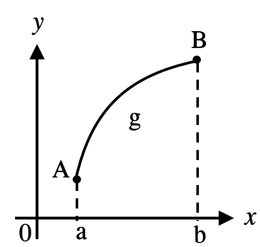
(6) ஒரு நகரும் வாகனத்தின் தடை (F)இன் சமன்பாடு $F = 5/x + 100x$ எனில், தடையின் சிறும மதிப்பைக் காண்க.

5.11 குழிவு (குவிவு) மற்றும் வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள் (Concavity (convexity) and points of inflection) :

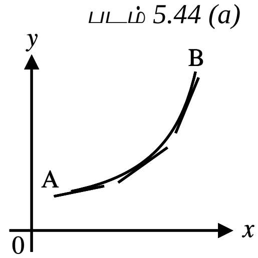
படங்கள் 5.44 (a), (b) ஆனது $[a, b]$இல் இரு ஏறும் சார்புகளின் வரைபடங்களை காட்டுகின்றன. இரு வரைடபடங்களிலும் புள்ளி Aயும் புள்ளி Bயும் சேர்க்கப்பட்டு வெவ்வேறு திசைகளில் வளைக்கப்பட்டுள்ளன. எப்படி நாம் இந்த இருவகை போக்கை வேறுபடுத்திக் காட்டுவது? படங்கள் 5.44 (c), (d) வளைவரையில் வெவ்வேறு இடங்களில் தொடுகோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. (c)இல் வளைவரையானது தொடுகோடுகளுக்கு மேலே அமைந்து உள்ளது. இந்நிலையில் f ஆனது $[a, b]$இல் மேல்நோக்கி குழிவு (கீழ்நோக்கி குவிவு) பெற்றுள்ளதாகப் பெறப்படும். (d)இல் வளைவரையானது தொடுகோடுகளுக்குக் கீழ் அமைந்துள்ளது. இந்நிலையில் gஆனது $[a, b]$இல் கீழ்நோக்கி குழிவு (மேல்நோக்கி குவிவு) பெற்றுள்ளதாகப் பெறப்படும்.



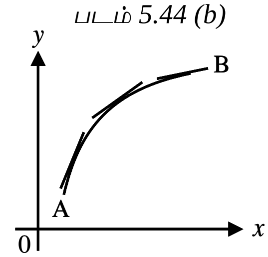
படம் 5.44 (a)



படம் 5.44 (b)



படம் 5.44(c)



படம் 5.44 (d)

வரையறை : I என்ற இடைவெளியில் fஇன் வரைபடம் Iஇல் உள்ள எல்லா தொடுகோடுகளுக்கும் மேலே இருந்தால் f ஆனது I என்ற இடைவெளியில் மேல்நோக்கி குழிவு (concave upward) அல்லது கீழ்நோக்கி குவிவு (convex downward) பெற்றுள்ளது என்று அழைக்கப்படும். I என்ற இடைவெளியில் fஇன் வரைபடம் எல்லா தொடுகோடுகளுக்கும் கீழே அமைந்தால் fஆனது கீழ்நோக்கி குழிவு (concave downward) அல்லது மேல் நோக்கி குவிவு (convex upward) என்று அழைக்கப்படும்.

குழிவு (குவிவு)இன் இடைவெளி காண இரண்டாவது வகையிடல் எப்படி உதவுகிறது என்பதை இப்பொழுது நாம் காண்போம். படம் 5.44(c)இன் மூலம் நாம் காண்பது இடப்புறத்திலிருந்து வலப்புறம் செல்கையில் தொடுகோட்டின் சாய்வு அதிகரிப்பதைக் காண்கிறோம். இதிலிருந்து வகையீடு $f'(x)$ ஒரு ஏறும் சார்பு மற்றும் வகையீடு $f''(x)$ ஒரு மிகை எண் என்பது தெளிவாகிறது. இதே போல் படம் 5.44 (d)இல் இடப்புறத்திலிருந்து வலப்புறம் செல்கையில் தொடுகோட்டின் சாய்வு குறைகிறது. எனவே $f''(x)$ ஒரு குறை எண் என்பதும் தெளிவாகிறது. இந்த காரணங்களின் அடிப்படையில் கீழ்க்காணும் தேற்றம் உண்மை எனக் காணலாம்.

குழிவு (குவிவு)க்கு சோதனைThe test for concavity (convexity) :

I என்ற இடைவெளியில் இருமுறை வகைப்படுத்தக்கூடிய சார்பு $f(x)$ என்க.

(i) $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in I$ எனில் f ஆனது I என்ற இடைவெளியில் மேல்நோக்கி குழிவு பெற்றுள்ளது (கீழ்நோக்கிக் குவிவு) ஆகும்.

(ii) $f''(x) < 0, \ \forall \ x \in I$ எனில் f ஆனது I என்ற இடைவெளியில் கீழ்நோக்கி குழிவு (மேல்நோக்கி குவிவு) பெற்றுள்ளது ஆகும்.

வரையறை : வளைவரையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Pஇல் வளைவரையானது மேல்நோக்கி குழிவு (கீழ்நோக்கி குவிவு)-லிருந்து கீழ்நோக்கி குழிவு (மேல் நோக்கி குவிவு)க்கோ அல்லது கீழ்நோக்கி குழிவு (மேல்நோக்கி குவிவு)-லிருந்து மேல்நோக்கி குழிவு (கீழ்நோக்கி குவிவு)-க்கோ மாறினால் இப்புள்ளி P வளைவு மாற்றுப் புள்ளி (point of inflection) ஆகும்.

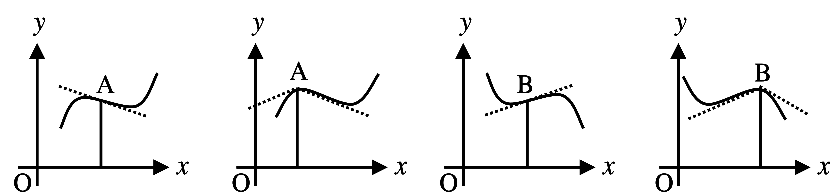
அதாவது, ஒரு தொடர்ச்சியான வளைவரையை குழிவுப் பகுதியிலிருந்து குவிவுப் பகுதியாக பிரிக்கக்கூடிய புள்ளி வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகும்.

வளைவு மாற்றுப் புள்ளியில் தொடுகோடு அமைந்தால் அத்தொடுகோடு வளைவரையை வெட்டும் என்பது தெளிவாகிறது. ஏனெனில் வளைவரையின் ஒரு பகுதி தொடுகோட்டிற்கு கீழும், மற்றொரு

பகுதி தொடுகோட்டிற்கு மேலும் அமைகிறது. பின்வரும் தேற்றம் மூலம் எந்த ஒரு நிலையில் மாறுநிலைப் புள்ளி (critical point), வளைவு மாற்றுப்புள்ளியாக மாறுகிறது என்பதை அறியலாம்.

தேற்றம் :

$y=f(x)$ என்ற சமன்பாட்டால் ஒரு வளைவரையானது வரையறுக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். $f''(x_0) = 0$ அல்லது $f''(x_0)$ காண முடியாது போவதாகக் கொள்வோம். $f''(x)$இன் குறியானது $x = x_0$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் போது குறி மாறினால் $x = x_0$ஐ x-அச்சுத் தூரமாய்க் கொண்ட வளைவரையின் மேல் உள்ள புள்ளியானது வளைவு மாற்றுப்புள்ளி ஆகும். x_0இன் அண்மைப் பகுதி (சுற்றுப்புறம்) (a, b)ஐ (a, x_0)இல் உள்ள ஒவ்வொரு xக்கும் $f''(x) > 0$ எனுமாறும் (x_0, b)-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $f''(x) < 0$ எனுமாறும் (இந்த நிபந்தனைகள் மாறியும் அமையலாம்) காணமுடிந்தால், $(x_0, f(x_0))$ ஆனது வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகும். அதாவது x_0-ன் சுற்றுப்புறத்தில் $f''(a)$ம் $f''(b)$ம் குறிகளால் வேறுபட்டிருத்தல் வேண்டும்.



படம் 5.45

மேற்குறிப்பு : வளைவுமாற்றுப் புள்ளிகள் மாறுநிலைப் புள்ளிகளாய் இருக்கத் தேவையில்லை. மற்றும் மாறுநிலைப் புள்ளிகள் வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகளாய் இருக்கத் தேவையில்லை. இருப்பினும் x_0 ஆனது மாறுநிலைப் புள்ளியாயிருந்து $f(x)$ ஆனது x_0-இன் வழியே செல்லுகையில் $f'(x)$, தன் குறியை மாற்றாது இருப்பின் x_0 ஒரு வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகும். மேலும் வளைவு மாற்றுப் புள்ளி x_0க்கு $f''(x_0) = 0$ என்ற நிபந்தனை தேவையாகும். $f''(x_0)=0$ ஆக இருந்தும், $f''(x)$தன் குறியை மாற்றாது இருப்பின், x_0 ஒரு வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாக இருக்க முடியாது. மேற்கண்ட விவாதங்களிலிருந்து பெறப்படுவது யாதெனில், வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள் x_0க்கு, $f''(x_0)=0$ ஆகவும், x_0இன் அண்மைப் பகுதி (a, b)இல் $f''(a)$ மற்றும் $f''(b)$ வெவ்வேறு குறிகளைப் பெற்றிருத்தலே ஆகும்.

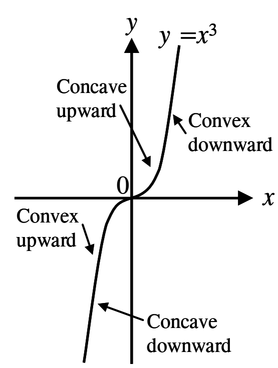
$x = x_0$ ஆனது $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒற்றை வரிசை சார்பின் தீர்வு என்க. அதாவது தனித்தீர்வு, மும்மடங்கு தீர்வு etc., என்க. அவ்வாறாயின் $x = x_0$ஆனது பெருமத்தையோ அல்லது சிறுமத்தையோ தரும். அதே சமயத்தில் $x = x_0$ ஆனது இரட்டைத் தீர்வாயின் $x = x_0$ கிடைத் தொடுகோட்டுடன் கூடிய வளைவு மாற்றுப் புள்ளியைத் தரும். இக்கொள்கைகள் பின்வரும் விளக்க எடுத்துக்காட்டில் நன்கு விளங்கும்.

$y = x^3$; $y' = 3x^2$ மற்றும் $y'' = 6x$.

$y'(0) = 0$ மற்றும் $y''(0) = 0$. மேலும் $x = 0$ ஆனது y மற்றும் y'ஆகிய இரண்டுக்குமே மாறுநிலைப் புள்ளியாகும். $x < 0$ மற்றும் $x > 0$க்கு $y'(x) > 0$ எனவே, $x = 0$ வழியே $f(x)$ செல்கையில் y' ஆனது தனது குறியை மாற்றுவதில்லை.

அதாவது, $y'(-0.1) > 0$ மற்றும் $y'(0.1) > 0$ அதாவது 0இன் அண்மைப்பகுதி, $(-0.1, 0.1)$இல் y' தன் குறியை மாற்றுவதில்லை. இவ்வாறாக, முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சோதனைப்படி $(0, 0)$ ஒரு வளைவு மாற்றுப்புள்ளியாகும்.

$y''(0) = 0$, $y''(-0.1) < 0$ மற்றும் $y''(0.1) > 0$. $y(x)$ ஆனது $x = 0$ வழியே செல்கையில், y'' ஆனது தனது குறியை மாற்றுகிறது. இந்த நிலையில் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சோதனைப்படி, $(0, 0)$ ஒரு வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகும். $y = x^3$இன் வளைவரையின் குவிவுப் பகுதியை, அதன் குழிவுப் பகுதியிலிருந்து $(0, 0)$ பிரிக்கிறது.



படம் 5.46

$y'(x) = 3x^2$

$\therefore$ $x = 0$ ஆனது $y'(x)=0$இன் இரண்டாம் வரிசைத் தீர்வாகும். தீர்வு வரிசை சோதனையிலிருந்து $(0, 0)$ ஆனது x-அச்சை கிடைத்தொடுகோடாகக் கொண்ட வளைவு மாற்றுப் புள்ளி என்பதை அறிகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.59 : $y = 2 - x^2$ என்ற வளைவரையின் குழிவு (குவிவு)-ன் சார்பகத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = 2 - x^2$$

$$y' = -2x \text{ மற்றும் } y'' = -2 < 0 \quad \forall\, x \in R$$

வளைவரையானது எல்லா புள்ளிகளிடத்தும் கீழ்நோக்கி குழிவாக (மேல்நோக்கி குவிவாக) உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 5.60 :

$y = e^x$ என்ற சார்பின் குவிவிற்கான அரங்கத்தினைக் காண்க.

தீர்வு : $y = e^x$; $y'' = e^x > 0 \;\forall\; x \in R$

வளைவரையானது எல்லா புள்ளிகளிடத்தும் கீழ்நோக்கி குவிவாக உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 5.61 :

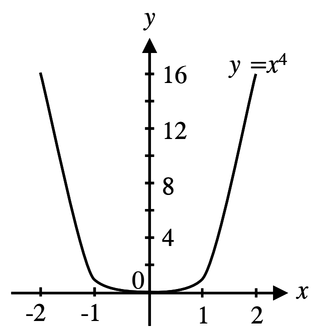
$y = x^4$ என்ற வளைவரைக்கு வளைவு மாற்றுப்புள்ளிகள் இருப்பின், காண்க.

தீர்வு : $y = x^4$

$y'' = 12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x < 0$ மற்றும் $x > 0$ எனில் $y'' > 0$

$\therefore$ வளைவரையானது மேல்நோக்கி குழிவாக உள்ளது. $x = 0$ வழியாக $y(x)$ செல்லும் போது y''இன் குறி மாறவில்லை. எனவே இவ்வளைவரைக்கு வளைவு மாற்றப்புள்ளியில்லை.



படம் 5.47

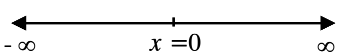
குறிப்பு : வளைவரையானது $(-\infty, 0)$ மற்றும் $(0, \infty)$இல் மேல்நோக்கி குழிவாக உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 5.62 : $y = x^3 - 3x + 1$ என்ற வளைவரை எந்த இடைவெளிகளில், மேல்நோக்கி குழிவு, குவிவு-ஆக உள்ளது என்றும் மற்றும் வளைவு மாற்றுப் புள்ளியையும் காண்க.

தீர்வு :

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$



படம் 5.48

$f''(x) = 6x$

$x > 0$ எனில் $f''(x) > 0$, $x < 0$ எனில் $f''(x) < 0$

$(-\infty, 0)$ என்ற இடைவெளியில் மேல்நோக்கி குவிவாகவும் மற்றும் $(0, \infty)$இல் மேல்நோக்கி குழிவாகவும் உள்ளது. $x = 0$ என்ற புள்ளியில் வளைவரையானது மேல்நோக்கி குவிவிலிருந்து மேல்நோக்கி குழிவிற்கு மாறுகிறதால் $(0, f(0))$ ஆனது வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகும். அதாவது $(0, 1)$ வளைவு மாற்றுப்புள்ளியாகும்,

குறிப்பு : *குழிவு மற்றும் குவிவிற்கான இடைவெளிகளை பிரிக்கப்பட்ட இடைவெளிகளில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை சோதித்தும் காணலாம்.*

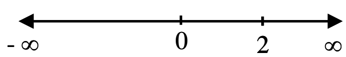
எடுத்துக்காட்டு 5.63 :

$y = x^4 - 4x^3$ *என்ற வளைவரைக்கு குழிவு மற்றும் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளையும் பரிசோதிக்க.*

தீர்வு :

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x\,(x - 2)$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ *அல்லது* 2 *இவை மெய் எண் கோட்டை* $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$ *என்ற மூன்று இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கிறது. பின்வரும் அட்டவணையை பூர்த்தி செய்வோம்.*



படம் 5.49

இடைவெளி	$f''(x) = 12x\,(x - 2)$	*குழிவு*
$(-\infty, 0)$	+	*மேல்நோக்கி*
$(0, 2)$	–	*கீழ்நோக்கி*
$(2, \infty)$	+	*மேல்நோக்கி*

புள்ளி $(0, f(0))$ *அதாவது* $(0, 0)$ *என்பது வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகும். ஏனெனில் வளைவரையானது இப்புள்ளியில் மேல்நோக்கி குழிவிலிருந்து கீழ்நோக்கி குழிவாக மாறுகிறது. மேலும்* $(2, f(2))$ *அதாவது* $(2, -16)$ *என்ற புள்ளியும் வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகும். ஏனெனில் வளைவரையானது இப்புள்ளியில் கீழ்நோக்கி குழிவிலிருந்து மேல்நோக்கி குழிவிற்கு மாறுகிறது.*

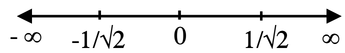
எடுத்துக்காட்டு 5.64 :

காஸியன் வளைவரை $y = e^{-x^2}$*, எந்த இடைவெளிகளில் குழிவு, குவிவு அடைகிறது என்பதையும், வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகளையும் காண்க.*

தீர்வு : $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

(முதல் மற்றும் இரண்டாவது வகையீடு எல்லா இடங்களிலும் அமைகிறது). $y'' = 0$ *எனில்*

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$$



$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, அல்லது $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

படம் 5.50

$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனில் $y'' > 0$ மற்றும் $x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனில் $y'' < 0$

இரண்டாவது வகையீடு. $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனும் புள்ளிவழிச் செல்லும் போது அது மிகை குறியிலிருந்து குறை குறிக்கு மாறுகிறது. எனவே $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனுமிடத்தில் ஒரு வளைவு மாற்றுப்புள்ளி உள்ளது.

$\therefore \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$ என்பது வளைவு மாற்றுப் புள்ளி ஆகும்.

$x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனில் $y'' < 0$ மற்றும் $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனில் $y'' > 0$. எனவே, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனுமிடத்தில் மேலும் ஒரு வளைவு மாற்றுப்புள்ளி உள்ளது. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$ என்பது இன்னொரு வளைவு மாற்றுப்புள்ளி ஆகும். (வளைவரை x-அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீராக இருப்பதால் மற்றொரு வளைவு மாற்றுப்புள்ளி உண்டு என்பது தெரிய வருகிறது). இரண்டாவது வகையீட்டின் மூலம் நாம் பெறுவது,

$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$இல் வளைவரை மேல்நோக்கி குழிவாகவும் ;

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$இல் வளைவரை மேல்நோக்கி குவிவாகவும்; மற்றும்

$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \infty$ இல் மேல்நோக்கி குழிவாகவும் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 5.65 :

$y = x^3 - 3x + 2$ என்ற சார்பிற்கு வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = x^3 - 3x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

இப்பொழுது $\frac{d^2y}{dx^2}(-0.1) = 6(-0.1) < 0$ மற்றும்

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0.1) = 6(0.1) > 0.$$

0இன் அண்மைப் பகுதியான $(-0.1, 0.1)$க்கு $y''(-0.1)$ம் $y''(0.1)$ம் எதிர் குறிகளாக அமைகின்றன.

$\therefore$ $(0, y(0))$ அதாவது $(0, 2)$ ஒரு வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகும்.

குறிப்பு : $y'(0) = -3 \neq 0$ எனவே $x = 0$ என்பது ஒரு மாறுநிலைப் புள்ளியல்ல என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

எடுத்துக்காட்டு 5.66 : $y = \sin x$, $x \in (0, 2\pi)$என்ற வளைவரையின் வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகளைத் தேர்வு செய்யவும்.

தீர்வு : $y' = \cos x$

$y'' = -\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

ஆனால் $x \in (0, 2\pi)$, $n = 1$ எனில் $x = \pi$

$y''(.9\pi) = -\sin(.9\pi) < 0$ மற்றும்

$y''(1.1\pi) = -\sin(1.1\pi) > 0$ ($\therefore$ $\sin(1.1\pi)$ ஒரு குறை மதிப்பு ஆகும்)

இரண்டாவது வகையிடல் சோதனை மூலம் $(\pi, f(\pi)) = (\pi, 0)$ என்பது ஒரு வளைவு மாற்றுப்புள்ளி என உறுதி செய்யப்படுகிறது.

குறிப்பு : $y'(\pi) = \cos\pi = -1 \neq 0$ எனவே $x = \pi$ ஒரு நிலைப் புள்ளியல்ல என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. $y = \sin x$க்கு $(-\infty, \infty)$இல் எண்ணத்தக்க வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள் உள்ளன. அப்புள்ளிகளை $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ மூலம் பெறலாம். எந்த புள்ளியிலும் $y'(n\pi) = (-1)^n$, பூச்சியமாகாது. இதிலிருந்து நாம் அறிவது வளைவு மாற்றுப்புள்ளிகள் நிலைப் புள்ளிகளாக அமையத் தேவையில்லை.

பயிற்சி 5.11

பின்வரும் சார்புகள் எந்த இடைவெளிகளில் குழிவு அடைகின்றன என்பதையும் மற்றும் வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகளையும் காண்க:

(1) $f(x) = (x-1)^{1/3}$ (2) $f(x) = x^2 - x$

(3) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x$ (4) $f(x) = x^4 - 6x^2$

(5) $f(\theta) = \sin 2\theta$; $(0, \pi)$ (6) $y = 12x^2 - 2x^3 - x^4$

வகையிடக்கூடிய சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் ஆகியவற்றை முதல் வரிசை வகைக்கெழு மூலம் சோதித்தல்

மாறுநிலைப் புள்ளி x_0 வழியாக $f'(x)$ செல்லும் போது $f'(x)$ இன் குறி			மாறுநிலைப் புள்ளியின் தன்மை
$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$	
+	$f'(x_0) = 0$ அல்லது f' தொடர்ச்சியற்ற சார்பு	–	பெருமப் புள்ளி
–	$f'(x_0) = 0$ அல்லது f' தொடர்ச்சியற்ற சார்பு	+	சிறுமப் புள்ளி
+	$f'(x_0) = 0$ அல்லது f' தொடர்ச்சியற்ற சார்பு	+	பெருமமும் இல்லை சிறுமமும் இல்லை. (ஏறும் சார்பு) வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாக இருக்கலாம்.
–	$f'(x_0) = 0$ அல்லது f' தொடர்ச்சியற்ற சார்பு	–	பெருமமும் இல்லை சிறு - மமும் இல்லை (இறங்கும் சார்பு) வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாக இருக்கலாம்.

இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சோதனை

$f(x)$ மற்றும் $f'(x)$இன் மாறுநிலைப் புள்ளியில் $f''(x)$ இன் குறிகள்				புள்ளியின் தன்மை
	$x = x_0$			
	$f'(x_0)$	$f''(x_0)$		
	0	–	fஇன் மாறு நிலைப் புள்ளி	பெருமப்புள்ளி
	0	+	fஇன் மாறு நிலைப் புள்ளி	சிறுமப்புள்ளி
$x < x_0$		$f''(x_0)$	$x > x_0$	
+	0 அல்லது $\neq 0$	0	–	வளைவு மாற்றுப்புள்ளி
–	0 அல்லது $\neq 0$	0	+	வளைவு மாற்றுப்புள்ளி
+	0 அல்லது $\neq 0$	0	+	ஏதும் சொல்ல முடியாது
–	0 அல்லது $\neq 0$	0	–	ஏதும் சொல்ல முடியாது

6. வகை நுண்கணிதம் : பயன்பாடுகள்-II
(DIFFERENTIAL CALCULUS : APPLICATIONS -II)

6.1 வகையீடுகள், பிழைகள் மற்றும் தோராய மதிப்புகள் :

$\frac{dy}{dx}$ என்ற லீபினிட்ஸ் (Liebnitz) குறியீட்டை x-ஐ பொறுத்து y-இன் வகைக் கெழுவைக் குறிக்கப் பயன்படுத்துகின்றோம். இதனை ஒரு தனி அலகாக கருதலாமே ஒழிய இது ஒரு விகிதம் அல்ல. இந்தப் பகுதியில் dy மற்றும் dx-க்கு தனித்தனியே பொருள் காணப்பட்டாலும் இவற்றின் விகிதமானது வகையீட்டைத் தரக்கூடியதாகும். இவ்வகை வகையீடுகள் சார்புகளின் தோராயமான மதிப்புகளை கணக்கிடப் பயன்படுகின்றன.

***வரையறை* 1 :** $y = f(x)$ ஒரு வகையிடத்தக்க சார்பு என்க. dx மற்றும் dy என்பவை வகையீடுகள் எனப்படும். இங்கு dx என்ற வகையீடானது சாராமாறி ஆகும். அதாவது dx-க்கு எந்த ஒரு மெய்யெண்ணையும் மதிப்பாகக் கொடுக்க முடியும். ஆனால் dy என்ற வகையீடானது dx என்ற வகையீட்டின் மூலம் $dy = f'(x)\, dx \quad (dx \approx \Delta x)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு :

(1) dx மற்றும் dy என்பவை இரண்டுமே மாறிகள் ஆகும். dx என்பது ஒரு சாரா மாறி ஆகும். dy என்பது x மற்றும் dx.-ஐ சார்ந்து இருக்கிற சார்ந்த மாறியாகும். f-இன் சார்பகத்திலுள்ள எண்களிலிருந்து xக்கு மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்ளும் போது dxக்கு மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன. இவற்றிலிருந்து dyக்கு எண் மதிப்பு கணக்கிட முடிகின்றது.

(2) $dx \neq 0$ இருக்கும்போது $dy = f'(x)dx$இன் இருபுறமும் dxஆல் வகுக்க பெறப்படுவது $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ஆகும். இவ்வாறாக $\frac{dy}{dx}$ ஆனது இங்கு வகையீடுகளின் விகிதம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு *6.1* : $y = x^3 + 2x^2$ எனில்

(i) dy காண்க.

(ii) $x = 2$ மற்றும் $dx = 0.1$ என இருக்கும்போது dy-இன் மதிப்பு காண்.

தீர்வு : (i) $f(x) = x^3 + 2x^2$ எனில் $f'(x) = 3x^2 + 4x$ எனவே $dy = (3x^2 + 4x)\, dx$

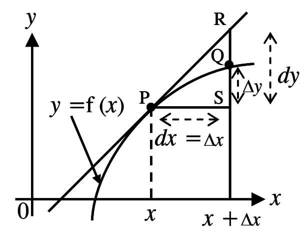
(ii) $x = 2$ மற்றும் $dx = 0.1$ஐ பிரதியிட்டால் $dy = (3 \times 2^2 + 4 \times 2)0.1 = 2.$

6.1.1 வகையீட்டின் வடிவக் கணித விளக்கம் :

P(x, $f(x)$) மற்றும் Q($x + \Delta x$, $f(x + \Delta x)$) என்பன f-க்குரிய வரைபடத்திலுள்ள புள்ளிகள், மற்றும் $dx = \Delta x$ என்க.

yஇன் ஒத்த மாற்றம் $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

PR என்ற தொடுகோட்டின் சாய்வு என்பது வகையீட்டுக்கெழு $f\,'(x)$ ஆகும். எனவே, S-ல் இருந்து Rக்குள்ள நேரடித் தூரம் என்பது $f\,'(x)\,dx = dy$ ஆகும்.



படம் 6.1

எனவே dy என்பது தொடுகோட்டின் ஏற்றம் அல்லது வீழ்ச்சியின் அளவைக் குறிக்கிறது. xஇல் ஏற்படும் மாற்றமான dx-ஐ பொறுத்து வளைவரை $y = f(x)$-ல் ஏற்படும் ஏற்றம் அல்லது வீழ்ச்சியின் அளவை Δy குறிக்கிறது.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \ \Delta x \text{ சிறியதாக இருக்கும் போது } \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx} \quad \ldots(1)$$

வடிவக் கணித முறையில் Δx சிறியதாக இருக்கும் போது நாண் PQ-இன் சாய்வும் P-இல் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வும் மிகவும் நெருங்கியதாகக் காணப்படும். $dx = \Delta x$ என எடுத்துக் கொண்டால் (1)ஆனது $\Delta y \approx dy$ ….(2) என ஆகிறது. இவற்றிலிருந்து Δx சிறியதாக இருக்கும் போது y-இல் ஏற்படுத்தும் மாற்றம் வகையீடு dyக்கு கிட்டத்தட்ட சமமாக இருக்கும். மேலும், இவ்வகையான நிலைகளை வடிவக் கணித விளக்கமாக படம் 6.1இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. yஇல் ஏற்படும் மெய்யான மாற்றத்தை **தனிப்பிழை** என்பர்

yஇன் மெய்யான பிழை $\Delta y \approx dy$.

$$\frac{\Delta y}{y}\text{-இன் அளவு} = \frac{y \text{ ல் ஏற்படுத்தும் மெய்யான மாறுதல்}}{y\text{இன் மெய்யான மதிப்பு}} \text{ என்பது}$$

சார் பிழை மற்றும் $\left(\frac{\Delta y}{y}\right) \times 100$ ஆனது **சதவீத பிழை** என்றும் அழைக்கப்படும். (2)இல் பெறப்படும் தோராய மதிப்பை பயன்படுத்தி சார்புகளின் தோராய மதிப்பை கணக்கிடலாம். $f(a)$ என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட எண் எனில் $f(a+\Delta x)$க்கு தோராய மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். இங்கு dx சிறியது மற்றும் $f(a + \Delta x) = f(a) + \Delta y$. ஆதாலால் (2)இலிருந்து $f(a + \Delta x) \approx f(a) + dy$ ….(3)

எடுத்துக்காட்டு 6.2 : $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ எனில் Δy மற்றும் dy-ஐ கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு கணக்கிடுக. *(i)* 2இலிருந்து 2.05க்கு x மாறும்போது *(ii)* 2இலிருந்து 2.01க்கு x மாறும்போது.

தீர்வு :

(i) $f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$

$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625.$

மற்றும் $\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625.$

பொதுவாக $dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)dx$

$x = 2,\ dx = \Delta x = 0.05$ *எனில்* $dy = [(3(2)^2+2(2)-2]\,0.05 = 0.7$

(ii) $f(2.01) = (2.01)^3 - (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$

$\therefore \Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$

$dx = \Delta x = 0.01,$ *எனில்* $dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.01 = 0.14$

மேற்குறிப்பு : *எடுத்துக்காட்டு 6.2இல் Δxஇன் மதிப்பு இன்னும் சிறியதாக இருக்கையில் $\Delta y \approx dy$இன் தோராய மதிப்பு இன்னும் சிறந்ததாக அமைகிறது. மேலும் Δyஐ விட dyஐ எளிதில் கணக்கிட முடியும். மிகவும் சிக்கலான சார்புகளுக்கு Δy-இன் மதிப்பை சரியாக கணக்கிட முடியாது. இந்நிலைகளில் வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி தோராய மதிப்புகளைக் காண்பது உதவியாக இருக்கும்.*

எடுத்துக்காட்டு 6.3 : *வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி $\sqrt[3]{65}$க்கு தோராய மதிப்புகளைக் காண்க.*

தீர்வு : $y = f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ *என்க.* $dy = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}\, dx$

எனவே $f(64) = 4$ *மற்றும்* $x = 64$ *மற்றும்* $dx = \Delta x = 1$ *எனக் கொள்வோம்.*

$$\text{இதிலிருந்து } dy = \frac{1}{3}\,(64)^{\frac{-2}{3}}\,(1) = \frac{1}{3(16)} = \frac{1}{48}$$

$$\therefore \sqrt[3]{65} = f(64 + 1) \approx f(64) + dy = 4 + \frac{1}{48} \approx 4.021$$

குறிப்பு : $\sqrt[3]{65}$ *இன் சரியான மதிப்பு = 4.0207257...ஆகும். $\Delta x = 1$ஆக இருக்கையில் வகையீட்டைப் பயன்படுத்தி தோராய மதிப்பு பெறப்படும் போது நாம் அடையும் மதிப்பு சரியான மதிப்பில் முதல் மூன்று தசம பின்னங்களுக்கு சமமாக அமைவதைக் காண்கிறோம்.*

எடுத்துக்காட்டு 6.4 : *ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 21 செ.மீ என அளவிடப்பட்டுள்ளது. அப்போது ஏற்பட்ட பிழை அதிபட்சமாக 0.05 செ.மீ என கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. இந்த ஆரத்தைப் பயன்படுத்தி கோளத்தின் கன அளவு கணக்கிடும் போது ஏற்படும் மிக அதிகபட்ச பிழையைக் காண்க.*

தீர்வு : கோளத்தின் ஆரம் r என்க. கன அளவு $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. ஆரம் கணக்கிடும்போது ஏற்பட்ட பிழை $dr = \Delta r$ எனக் குறிப்பிடலாம். எனவே, அதற்கு ஏற்றாற் போல் கணிக்கப்பட்ட கன அளவில் ஏற்படும் பிழை ΔV என்க. இதை தோராயமாக வகைக்கெழுவில் குறிப்பிடும்போது $\Delta V \approx dV = 4\pi r^2\, dr$ ஆகும்.

$r = 21$ மற்றும் $dr = 0.05$, ஆக இருக்கும்போது $dV = 4\pi(21)^2\, 0.05 \approx 277$.

$\therefore$ கன அளவு கணக்கிடும்போது ஏற்படும் மிக அதிகபட்ச பிழை 277 செ.மீ^{3}.

குறிப்பு : மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில் கிடைக்கப்பெற்ற பிழை பெரிய அளவில் இருப்பினும் அப்பிழையின் வீரியத்தைச் சார் பிழையின் (relative error) மூலம் கணக்கிடலாம்.

சார் பிழையானது கன அளவு கணக்கிடும் போது கிடைக்கக்கூடிய பிழைக்கும், மொத்த கன அளவிற்கும் உள்ள விகிதமாகும்.

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} \approx \frac{277}{38{,}808} \approx 0.00714$$

இவ்வாறாக ஆரத்தின் சார் பிழை $\frac{dr}{r} = \frac{0.05}{21} \approx 0.0024$ ஆனது கன அளவில் ஏற்படுத்தும் பிழை 0.007 ஆகும். இப்பிழைகளை முறையே 0.24% ஆரத்திலும் 0.7% கன அளவிலும் ஏற்படுத்தும் சதவீதப் பிழைகளாக (percentage error) கருதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.5 : ஒரு தனி ஊசலின் நீளம் l மற்றும் முழு அலைவு நேரம் T எனில் $T = k\sqrt{l}$ (k என்பது மாறிலி). தனி ஊசலின் நீளம் 32.1 செ.மீ,இலிருந்து 32.0 செ.மீ.க்கு மாறும் போது, நேரத்தில் ஏற்படும் சதவீதப் பிழையை கணக்கிடுக.

தீர்வு : $T = k\sqrt{l} = k\, l^{\frac{1}{2}}$ எனில்

$$\frac{dT}{dl} = k\left(\frac{1}{2} \times l^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{k}{2\sqrt{l}}\right)$$ மற்றும் $dl = 32.0 - 32.1 = -0.1$ செ.மீ

Tஇல் உள்ளபிழை= Tஇல் ஏற்படும் தோராயமான மாற்றம்

$$\Delta T \approx dT = \left(\frac{dT}{dl}\right) dl = \left(\frac{k}{2\sqrt{l}}\right)(-0.1)$$

$$\text{சதவீதப் பிழை} = \left(\frac{\Delta T}{T}\right) \times 100\,\% = \frac{\frac{k}{2\sqrt{l}}(-0.1)}{k\sqrt{l}} \times 100\,\%$$

$$= \left(\frac{-0.1}{2l}\right) \times 100\ \% = \left(\frac{-0.1}{2(32.1)}\right) \times 100\%$$

$$= -\ 0.156\%$$

அலைவு நேரத்தில் ஏற்படும் சதவீதப் பிழை 0.156% குறைவு ஆகும்.

மாற்று முறை : $$T = k\sqrt{l}$$

இருபுறமும் மடக்கை காண $$\log T = \log k + \frac{1}{2} \log l$$

இருபுறமும் வகையீடு காண, $$\frac{1}{T}\, dT = 0 + \frac{1}{2}\ \frac{1}{l} \times dl$$

$$\text{i.e, } \frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{T}\, dT = 0 + \frac{1}{2}\ \frac{1}{l} \times dl$$

$$\frac{\Delta T}{T} \times 100 = \frac{1}{2} \times \frac{dl}{l} \times 100$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(-0.1)}{32.1} \times 100$$

$$= -\ 0.156\%$$

ie., அலைவு நேரத்தில் ஏற்படும் சதவீதப் பிழை குறைவு 0.156 ஆகும்.

எச்சரிக்கை : மடக்கை காணத்தக்க சார்புகளுக்கு மட்டுமே மடக்கையை பயன்படுத்தி வகைக்கெழு கணக்கிட முடியும் என்ற பொதுவான கொள்கையை மனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.6 : ஒரு வட்ட வடிவத் தகட்டின் ஆரம் 10 செ.மீ (± 0.02). இதன் பரப்பு கணக்கிடும் போது ஏற்படும் பிழையைக் கணக்கிடுக. மற்றும் இதன் சதவீதப் பிழையையும் கணக்கிடுக.

தீர்வு : வட்டத் தகட்டின் பரப்பு $A = \pi r^2$ மேலும் பரப்பு கணக்கிடும் போது ஏற்படும் மாற்றம் $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$, தோராயமாக பரப்பில் ஏற்படும் மாற்றம் $\Delta A \approx 2\pi r.dr$ = 10 செ.மீ. மற்றும் $dr = 0.02$ ஆக இருக்கும் போது $\Delta A \approx (2\pi r)dr = (2\pi)\ (10)\ (0.02) \approx 0.4\pi$ செ.மீ^{2}

∴ பரப்பு கணக்கிடப்படும் போது ஏற்படும் தோராயப் பிழை 1.257 செ.மீ^{2}

சதவீதப் பிழை $\approx \left(\frac{0.4\pi}{\pi(10)^2}\right) \times 100 = 0.4\%$

எடுத்துக்காட்டு 6.7 : ஒரு எண்ணின் nஆம் படி மூலம் கணக்கிடப்படும் போது ஏற்படும் சதவீதப் பிழை தோராயமாக, அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின் $\frac{1}{n}$ மடங்கு ஆகும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு : *x* என்பது ஓர் எண் என்க.

$$y = f(x) = (x)^{\frac{1}{n}} \text{ என்க. } \log y = \frac{1}{n} \log x$$

இருபுறமும் வகையீடு காண நாம் அடைவது $\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x}\,dx$

$$i.e., \quad \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{y} \times 100 \approx \frac{1}{n}\left(\frac{dx}{x} \times 100\right)$$

$$= \frac{1}{n} \text{ மடங்கு அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழை.}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.8 : *x* மீட்டர் பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கன சதுரத்தின் பக்கம் 1% பெருகும் போது அதன் கன அளவில் ஏற்படும் தோராயமான மாற்றத்தை கணக்கிடுக.

தீர்வு : $V = x^3 \quad ; \quad dV = 3x^2\,dx$ எனில்,

$$dx = 0.01x, \quad dV = 3x^2 \times (0.01x) = 0.03\,x^3 \text{ மீ}^3.$$

பயிற்சி 6.1

(1) பின்வரும் சார்புகளுக்கு வகையீடு கணக்கிடுக.

(i) $y = x^5$ (ii) $y = \sqrt[4]{x}$ (iii) $y = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

(iv) $y = \frac{x-2}{2x+3}$ (v) $y = \sin 2x$ (vi) $y = x \tan x$

(2) வகையீடு dy காண்க. மேலும் கொடுக்கப்பட்ட x மற்றும் dx-ன் மதிப்புகளுக்கு dy-ன் மதிப்புகளை கணக்கிடுக.

(i) $y = 1 - x^2, \; x = 5, \; dx = \frac{1}{2}$

(ii) $y = x^4 - 3x^3 + x - 1, \; x = 2, \; dx = 0.1.$

(iii) $y = (x^2 + 5)^3, \; x = 1, \; dx = 0.05$

(iv) $y = \sqrt{1-x}, \; x = 0, \; dx = 0.02$

(v) $y = \cos x, \; x = \frac{\pi}{6} \; dx = 0.05$

(3) வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்புகளை கணக்கிடுக.

(i) $\sqrt{36.1}$ (ii) $\frac{1}{10.1}$ (iii) $y = \sqrt[3]{1.02} + \sqrt[4]{1.02}$ (iv) $(1.97)^6$

(4) ஒரு கன சதுரத்தின் விளிம்பு 30 செ.மீ என கணக்கிடப்பட்டுள்ளது, அது கணக்கிடும்போது ஏற்பட்ட பிழை 0.1 செ.மீ. ஆகும். வகையீட்டைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைக் கணக்கிடும் போது ஏற்படும் அதிக பட்ச பிழையைக் கணக்கிடுக. (i) கன சதுரத்தின் கன அளவு (ii) கன சதுரத்தின் புறப்பரப்பு.

(5) ஒரு வட்ட வடிவத் தகட்டின் ஆரம் 24 செ.மீ. கணக்கீட்டில் ஏற்படும் அதிகபட்ச பிழை 0.02 செ.மீ எனக் கொண்டு
   (i) வகையீட்டைப் பயன்படுத்தி வட்டவடிவத் தகட்டின் பரப்பு கணக்கிடும் போது ஏற்படும் மிக அதிக பிழை காண்க.
   (ii) சார் பிழையைக் காண்க.

6.2 வளைவரை வரைதல் :

நுண்கணிதம் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள் பற்றி மிகச் சிறந்த முறையில் தெரிந்து கொள்ள சார்புகளின் வடிவக் கணித வரைபடம் மிகவும் உதவியாக அமையும். ஒரு சார்பின் தன்மையை ஆராய, அச்சார்புக்குரிய வரைபடத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியையும் எடுத்துக் கொண்டு ஆராய்வது என்பது சாத்தியமில்லை. இருந்தபோதும் நம்மால் சார்புகளுக்குரிய வரைபடங்களை ஓரளவுக்கு வரைந்து, அவைகளின் இயல்புகள் மற்றும் பண்புகள் பற்றி சில சிறப்புப் புள்ளிகளைக் கொண்டு அறியலாம். இதனைப் பெறுவதற்கு நாம் பின்வரும் உத்திகளை கையாளலாம்.

(1) சார்பகம், நீட்டிப்பு, வெட்டுத்துண்டு மற்றும் ஆதி (Domain, Extent, Intercepts and origin) :

(i) xஇன் எம்மதிப்புகளுக்கு $y = f(x)$ என்ற சார்பு வரையறுக்கப் படுகிறதோ அம்மதிப்புகள் யாவும் சேர்ந்து அதன் சார்பகத்தைத் தீர்மானிக்கும்.

(ii) கிடை மட்டமாக (மேல் கீழாக) வளைவரை இருக்கக் கூடியதனை $x(y)$-ன் மதிப்புகளுக்கு $y(x)$-ன் மதிப்புகள் கிடைப்பது பொறுத்துக் காணலாம்.

(iii) $x = 0$ எனப் பிரதியிட்டு y வெட்டுத் துண்டையும் $y = 0$ என பிரதியிட்டு x வெட்டுத் துண்டையும் காணலாம்.

(iv) (0,0) என்ற புள்ளி சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால் வளைவரையானது ஆதிவழியேச் செல்லும்.

(2) சமச்சீர் (Symmetry) : பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு வளைவரையானது ஏதேனும் ஒரு கோட்டிற்கு சமச்சீராக உள்ளதா என்பதனைக் காணலாம் :

(i) yக்கு பதில் $-y$ பிரதியிடுவதால் சமன்பாடு மாறாமல் இருந்தால் வளைவரையானது x-அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது எனப்படும்.

(ii) xக்கு பதில் $-x$ பிரதியிடுவதால் சமன்பாடு மாறாமல் இருந்தால் வளைவரையானது y-அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது எனப்படும்.

(iii) x-க்கு பதில் $-x$ம் yக்கு பதில் $-y$-ம் பிரதியிடுவதால் சமன்பாடு மாறாமல் இருப்பின் வளைவரையானது ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது எனப்படும்.

(iv) x-க்கு பதில் y-ம், yக்கு பதில் x-ம் பிரதியிடுவதால் சமன்பாடு மாறாமல் இருப்பின் $y = x$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது எனப்படும்.

(v) x-க்கு பதில் $-y$-ம் y-க்கு பதில் $-x$ம் பிரதியிடுவதால் சமன்பாடு மாறாமல் இருப்பின் வளைவரையானது $y = -x$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது எனப்படும்.

(3) *தொலைத் தொடுகோடுகள்* (Asymptotes) (*ஆய அச்சுகளுக்கு இணையாக உள்ளவை மட்டும்*) :

$x \to \pm\infty$ எனும் போது $y \to c$ எனில் $y = c$ ஆனது x-அச்சுக்கு இணையான தொலைத் தொடுகோடு ஆகும். (இங்கு c முடிவான மெய்யெண்).

$y \to \pm\infty$ எனும் போது $x \to k$ எனில் $x = k$ ஆனது y-அச்சுக்கு இணையான தொலைத் தொடுகோடு ஆகும். (இங்கு k-முடிவான மெய்யெண்)

(4) *ஓரியல்பு தன்மை* (Monotonicity) : முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சோதனையைப் பயன்படுத்தி வளைவரை ஏறும் அல்லது இறங்கும் தன்மைக்கு x-இன் இடைவெளிகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.

(5) *சிறப்பு புள்ளிகள்* (Special points) (*வளைவுத் தன்மை*) :

முதல் வரிசை மற்றும் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சோதனைகளைப் பயன்படுத்தி வளைவரையின் குழிவு இடைவெளிகள் மற்றும் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு :

எடுத்துக்காட்டு 6.9 : $y = x^3 + 1$ என்கிற வளைவரையை வரைக.

தீர்வு :

(1) *சார்பகம், நீட்டிப்பு, வெட்டுத்துண்டுகள் மற்றும் ஆதி* :

x-இன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும் $f(x)$ ஆனது வரையறுக்கப்படுகிறது. எனவே, $f(x)$இன் சார்பகம் $(-\infty, \infty)$ என்கிற முழு இடைவெளி ஆகும். கிடைமட்ட நீட்டிப்பு $-\infty < x < \infty$ மற்றும் நிலை குத்து நீட்டிப்பு $-\infty < y < \infty$ ஆகும். $x = 0$ எனில் yஇன் வெட்டுத் துண்டு $+1$ மற்றும் $y = 0$ எனில் xஇன் வெட்டுத்துண்டு -1 என்பது தெளிவு. வளைவரையின் சமன்பாட்டை $(0,0)$ நிறைவு செய்யாததால், அவ்வளைவரை ஆதி வழியாகச் செல்லாது என்பது வெளிப்படையாகிறது.

(2) சமச்சீர் சோதனை : சமச்சீர் சோதனைகளில் இருந்து வளைவரையானது எந்த ஒரு சமச்சீர் பண்பையும் அடையவில்லை என்பது தெளிவாகிறது.

(3) தொலைத் தொடுகோடுகள் : $x \to c$ (c முடிவுள்ள எண்) எனில் y ஆனது $\pm \infty$ஐ நோக்கிச் செல்லாது. இதன் மறுதலையும் உண்மை, எனவே எந்த ஒரு தொலைத் தொடுகோடும் அமையாது.

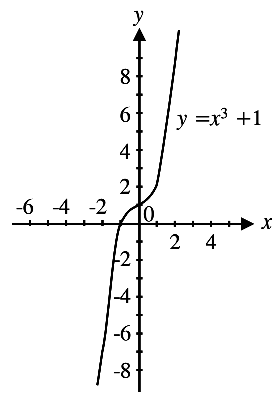
(4) ஓரியல்பு தன்மை : எல்லா xக்கும் $y' \geq 0$ ஆதலால், வளைவரையானது $(-\infty, \infty)$ முழுவதுமாக ஏறுமுகமாகச் செல்லும் என்பதை முதல் வரிசை வகைச் சோதனை மூலம் அறிகிறோம்.

(5) சிறப்பு புள்ளிகள் :

$(-\infty, 0)$ என்ற இடைவெளியில் கீழ்புறமாக குழிவாகவும் $(0, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் மேற்புறமாக குழிவாகவும் இருக்கும் என அறிகிறோம்.

$x < 0$ எனில் $y'' = 6x < 0$, $x > 0$ எனில்

$y'' = 6x > 0$ மற்றும் $x = 0$ எனில் $y'' = 0$. இதிலிருந்து $(0,1)$ ஆனது வளைவு மாற்றுப் புள்ளி ஆகும்.



படம் 6.2

எடுத்துக்காட்டு 6.10 :

$y^2 = 2x^3$ என்ற வளைவரையை வரைக.

தீர்வு :

(1) சார்பகம், நீட்டிப்பு, வெட்டுத்துண்டு மற்றும் ஆதி :

$x \geq 0$ என இருக்கும் போது y என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x \to +\infty$ எனில் $y \to \pm \infty$ எனவே வளைவரையானது முதல் மற்றும் நான்காம் கால் பகுதியில் காணப் பெறும் அச்சின் வெட்டுப் புள்ளிகள்

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ மற்றும் } y = 0 \Rightarrow x = 0$$

எனவே வளைவரையானது ஆதிவழியேச் செல்கிறது என்பது தெளிவு.

(2) சமச்சீர் சோதனை :

சமச்சீர் சோதனையில் இருந்து வளைவரையானது x-அச்சிற்கு மட்டுமே சமச்சீரானது என அறிகிறோம்.

(3) தொலைத் தொடுகோடுகள் :

$x \to +\infty$ எனில் $y \to \pm \infty$ இதன் மறுதலையும் உண்மை. எனவே, வளைவரைக்கு தொலைத் தொடுகோடுகள் கிடையாது.

(4) ஓரியல்பு தன்மை :

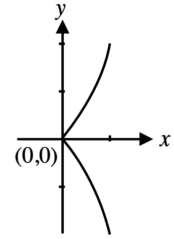
$\therefore\ y = \sqrt{2}\ x^{3/2}$ என்ற கிளையில் வளைவரை ஏறுமுகமாக இருக்கும். ஏனெனில் $x > 0$க்கு $\frac{dy}{dx} > 0$

$y = -\sqrt{2}x^{3/2}$ என்ற கிளையில் இது இறங்கு முகமாக இருக்கும். ஏனெனில் $x > 0$க்கு $\frac{dy}{dx} < 0$

(5) *சிறப்புப் புள்ளிகள்:* (0,0) என்பது இதன் வளைவு மாற்றுப் புள்ளியல்ல, இந்த வளைவரையை அரை கன பரவளையம் என்பர்.

குறிப்பு :

(0, 0) என்ற புள்ளியில் கிடைக்கும் இரண்டு தொடுகோடுகள் ஒன்றி விடுவதால், ஆதி ஒரு சிறப்பு புள்ளியாகும். அத்தகைய புள்ளியை 'கூர்' (cusp) என்று அழைப்பர்.



படம் *6.3*

எடுத்துக்காட்டு 6.11 :

$y^2\ (1 + x) = x^2\ (1 - x)$ என்ற வளைவரைக்கு

(i) வளைவரை காணப்படும் பகுதி (ii) சமச்சீர்

(iii) தொலைத் தொடுகோடுகள் (iv) கண்ணிகள்

ஆகியவற்றை ஆராய்க.

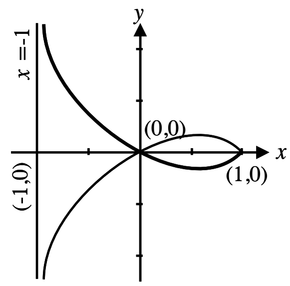
தீர்வு :

(i) ***வளைவரை காணப்படும் பகுதி :*** $x > 1$ மற்றும் $x \le -1$க்கு கொடுக்கப்பட்ட சார்பு நன்கு வரையறுக்கப்பட வில்லை. $-1 < x \le 1$ என்ற இடைவெளியில் மட்டும் வளைவரை காணப்படும்.

(ii) ***சமச்சீர்:*** வளைவரையானது x-அச்சைப் பொறுத்து மட்டுமே சமச்சீர் உடையது.

(iii) ***தொலைத் தொடுகோடுகள் :*** $x = -1$ ஆனது வளைவரையின் நிலைக்குத்து தொலைத் தொடுகோடு ஆகும். இது y அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும்.

(iv) கண்ணிகள் : வளைவரையானது (0,0) என்ற புள்ளி வழியே இருமுறை செல்கிறது. எனவே $x = 0$ மற்றும் $x = 1$க்கு இடையே ஒரு கண்ணி உருவாகும்.



படம் 6.4

எடுத்துக்காட்டு 6.12 : $a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$, $a > 0$ என்ற வளைவரைக்கு

(i) வளைவரை காணப்படும் பகுதி (ii) சமச்சீர்

(iii) தொலைத் தொடுகோடுகள் (iv) கண்ணிகள்

ஆகியவற்றை ஆராய்க.

தீர்வு :

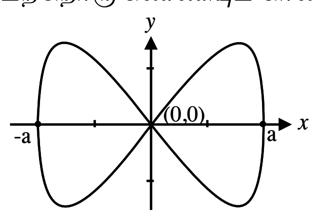
(i) வளைவரை காணப்படும் பகுதி : கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $(a^2 - x^2) \geq 0$க்கு நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. i.e., $x^2 \leq a^2$ i.e., $x \leq a$ மற்றும் $x \geq - a$க்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) சமச்சீர் : இவ்வளைவரை x –அச்சு மற்றும் y-அச்சுகளுக்கு சமச்சீர் ஆக உள்ளது என்பது தெளிவு. எனவே இது ஆதியைப் பொறுத்தும் சமச்சீர் ஆக உள்ளது.

(iii) தொலைத் தொடுகோடுகள் : இதற்கு தொலைத் தொடுகோடுகள் கிடையாது.

(iv) கண்ணிகள் : $-a < x < 0$ மற்றும் $0 < x < a$ எனில் $y^2 > 0 \Rightarrow$ y ஆனது மிகை அல்லது குறை எண்ணாயிருக்கலாம்.

$\therefore$ $x = 0$ மற்றும் $x = a$க்கு இடையே ஒரு கண்ணியும் $x = 0$ மற்றும் $x = -a$க்கு இடையே மற்றொரு கண்ணியும் காணப்படும்.



படம் 6.5

எடுத்துக்காட்டு 6.13 : $y^2 = (x-1)(x-2)^2$ என்ற வளைவரைக்கு

(i) வளைவரை காணப்படும் பகுதி (ii) சமச்சீர்

(iii) தொலைத் தொடுகோடுகள் (iv) கண்ணிகள்

ஆகியவற்றை ஆராய்க.

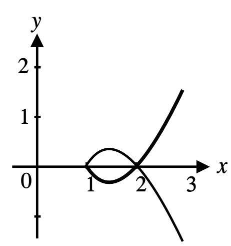
தீர்வு :

(i) ***வளைவரை காணப்படும் பகுதி*** **:** $(x-1) < 0$க்கு இவ்வளைவரை வரையறுக்கப்படவில்லை. ie., $x < 1$ என இருக்கும் போது R.H.S. குறை எண் $\Rightarrow y^2 < 0$ என இருக்க முடியாது. வளைவரை $x \geq 1$க்கு மட்டுமே வரையப்படுகிறது.

(ii) ***சமச்சீர்:*** இந்த வளைவரையானது x-அச்சுக்கு சமச்சீர் ஆக இருக்கும்.

(iii) ***தொலைத் தொடுகோடுகள்*** **:** இந்த வளைவரைக்கு தொலைத் தொடுகோடுகள் கிடையாது.

(iv) ***கண்ணிகள்*** **:** தெளிவாக (1, 0) மற்றும் (2, 0) ஆகியவற்றிற்கு இடையே ஒரு கண்ணி உருவாகும்.



படம் 6.6

பயிற்சி 6.2

(1) $y = x^3$ என்ற வளைவரையை வரைக.

கீழ்க்காணும் வளைவரைகளுக்கு

(i) வளைவரை காணப்படும் பகுதி (ii) சமச்சீர்

(iii) தொலைத் தொடுகோடுகளின் (iv) கண்ணிகள்

ஆகியவற்றை ஆராய்க.

(2) $y^2 = x^2(1-x^2)$ (3) $y^2(2+x) = x^2(6-x)$

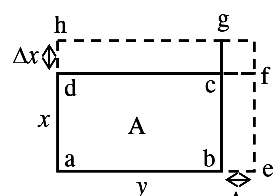
(4) $y^2 = x^2(1-x)$ (5) $y^2 = (x-a)(x-b)^2$; $a, b > 0$, $a > b$.

6.3 பகுதி வகையிடல் :

ஒரு நாட்டின் பொருளாதாரம் (E) பல காரணிகளைப் பொறுத்து அமைகின்றது. ஒரு பயிரின் விளைச்சல் (Y) மழை, மண், உரம் போன்ற காரணிகளைப் பொறுத்து அமைகின்றது. இதேப் போல் ஒரு குழந்தையின் நடத்தை (C) அதன் பெற்றோர்களின் நடத்தை, சுற்றுப்புறச் சூழல்நிலை

இவைகளைப் பொறுத்து அமைகின்றது. சமதள வடிவியலில் பரப்பு (A) கன அளவு (V) போன்றவை நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் ஆகியவற்றின் அளவுகளைக் பொறுத்து அமைகின்றன. மேற்குறிப்பிட்ட பொருளாதாரம், விளைச்சல், நடத்தை, பரப்பு அல்லது கன அளவு இவையாவும் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட காரணிகளைப் பொறுத்து அமைகின்றன. ஏதேனும் ஒரு மாற்றம் ஒரு மாறியில் ஏற்படும் போது அதைச் சார்ந்த மாறிகள் E,Y,C, A அல்லது V ஆகியவற்றில் நிகழக்கூடிய மாற்றங்களைப் பற்றி நாம் தெரிந்து கொள்வது மிக அவசியம். இந்த சிறு மாற்றங்கள் எல்லா சாரா மாறிகளிலோ அல்லது சில மாறிகளில் மட்டுமாகவோ இருக்கலாம். ஒரு சார்ந்த மாறியானது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சாரா மாறிகளைக் கொண்டிருக்கும் போது சார்ந்த மாறியின் மீது ஒரு சாரா மாறி ஏற்படுத்தும் மாற்றத்தினை கணக்கிட பிற சாரா மாறிகளை நிலைப்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். இந்த மாதிரியான மாற்றங்களின் ஆய்வானது பகுதி வகையிடல் என்ற கொள்கையை நமக்கு தருகின்றது.

இவற்றில் தெளிவு பெற, ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் x, அகலம் y, பரப்பு A என்க. எனவே $A = xy = f(x,y)$. இங்கு A என்பது x, y என்ற இரண்டு சாரா மாறிகளைச் சார்ந்துள்ளது.



படம் 6.7

$A = xy = abcd$-இன் பரப்பு

yஇல் ஒரு சிறு மாற்றம் ஏற்பட்டதாகக் கொள்வோம். ie., yக்கு பதில் $y + \Delta y$ எனக் கொள்வோமாயின் புதிய பரப்பு $A' = x(y + \Delta y)$. இங்கு xக்கு எந்த மாற்றமும் செய்யப்படவில்லை. ஆனால் பரப்பில் மாற்றம் ஏற்பட்டுள்ளது. இதைப் போல் yக்குப் பதில் x-ல் மாற்றம் செய்தால் நாம் அடையும் புதிய பரப்பு $abgh = A'' = (x + \Delta x)y$.

x மற்றும் y ஆகிய இரண்டிலுமே சிறு மாற்றங்கள் ஏற்படுமானால் நாம் பரப்பிலும் மாற்றத்தைக் காண முடிகிறது.

இந்த பரப்பு $(x + \Delta x)\ (y + \Delta y)$ = பரப்பு $aeih$.

இங்கு நாம் ஒரு மாறிலியில் மட்டும் மாற்றம் ஏற்படுத்தி மற்ற மாறிகள் மாறாமல் இருப்பதாக கட்டுப்படுத்திக் கொள்வோம். நாம் இரண்டு அல்லது மூன்று சாராத மாறிகள் உடைய சார்புகளை பற்றி மட்டுமே எடுத்துக் கொள்வோம். ஒரு சார்பானது ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைப் பொறுத்து அமையும் போது தொடர்ச்சி சம்பந்தப்பட்ட கணக்குகளும் எல்லை சம்பந்தப்பட்ட செய்முறைகளையும் நாம் ஏற்கனவே படித்த ஒரே ஒரு சாரா மாறிக்குரிய வகையிடல் கணக்குகள் போன்றே காணலாம்.

பகுதி வகைக் கெழுக்கள் :

(x_0,y_0) என்பது $f(x,y)$-இன் சார்பகத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. $u = f(x, y)$ என்க.. (x_0,y_0) என்ற புள்ளியில் x-ஐ பொறுத்து u-இன் பகுதி வகையிடலை வரையறுப்போம். கீழ்க்காணும் எல்லைக் காணப்பெறின், இதனை $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் $f(x,y_0)$-இன் x-ஐப் பொறுத்து சாதாரண வகைக் கெழுவாக வரையறுக்கலாம்.

$$i.e., \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{(x_0,\, y_0)} = \frac{d}{dx}\, f(x,y_0)\Big]_{x = x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

இதனை (x_0, y_0)-இல் f_x அல்லது u_x எனக் குறிப்பிடலாம்.

இதைப் போல் கீழ்க்காணும் எல்லைக் காணப்பெறின் yஐ பொறுத்து (x_0,y_0) என்ற புள்ளியில் $u = f(x,y)$-இன் பகுதிவகைக் கெழுவானது

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{(x_0,\, y_0)} = \frac{d}{dy}\, f(x_0,y)\Big]_{y = y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

இதனை (x_0, y_0)இல் f_y அல்லது u_y என குறிப்பிடலாம்.

ஒரு சார்புக்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் பகுதி வகைக் கெழுக்களைக் காண முடிந்தால், அப்புள்ளியில் சார்பு **வகையிடத்தக்கது** எனப்படும். இக்கொள்கை சார்பகத்தின் எல்லா புள்ளிகளிடத்தும் **வகையிடத்தக்கதாயின் சார்பகத்தில் வகையிடத்தக்கது** என்பதாகும். பகுதி வகைக் கெழுக்களைக் காணும் முறையை **பகுதி வகையிடல்** என்கிறோம்.

மேற்குறிப்பு : இங்கு நாம் இரண்டு அல்லது மூன்று மாறிகள் உடைய தொடர்ச்சியான சார்புகளின், தொடர்ச்சியான முதல் வகை பகுதிவகைக் கெழுக்களைப் பற்றி பார்ப்போம்.

இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகையீடு : $u = f(x,y)$ என்ற சார்பை நாம் இருமுறை வகையிடல் செய்தால் நாம் அடைவது இரண்டாம் வரிசை வகைக் கெழு ஆகும். இதனை

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ மற்றும்}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \text{ என வரையறுப்பர்.}$$

இதனை f_{xx} அல்லது u_{xx}, f_{yy} அல்லது u_{yy} என குறிப்பிடுவர்.

மேலும் $f_{xy} = f_{yx}$ அல்லது $u_{xy} = u_{yx}$ ஆகும்.

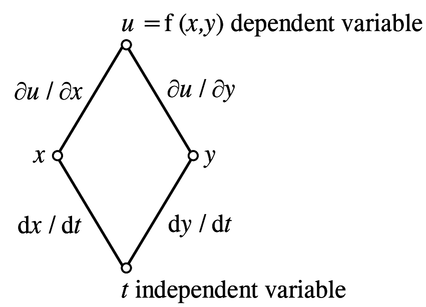
இங்கு சார்பு மற்றும் அதன் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் தொடர்ச்சியானவையாதலால் வகைப்படுத்தப்படும் வரிசை முறையைப் பற்றி பொருட்படுத்த வேண்டியதில்லை என்பதை தெரிந்து கொள்க. (யூலரின் கொள்கைப்படி).

இரண்டு மாறிகளுக்குரிய சங்கிலி விதி (சார்பின் சார்பு விதி) :

$u = f(x,y)$ என்பது வகையிடத்தக்க சார்பு என்க. மற்றும் x, y என்பன வகையிடத்தக்க t-ஆல் ஆன சார்புகள் எனில் u என்பது tஇல் வகையிடத்தக்க சார்பு ஆகும். மேலும்

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

கிளைத்தல் வரைபடம் இரண்டு மாறிகளுக்குரிய சங்கிலி விதியை மறக்காதிருக்க உதவும்.

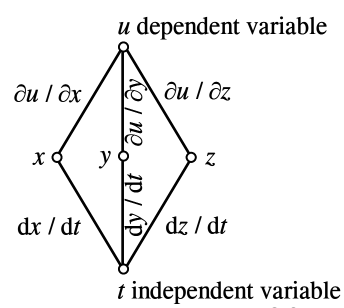


படம் 6.8

மூன்று மாறிகளுக்குரிய சங்கிலி விதி (சார்பின் சார்பு விதி) :

$u = f(x,y, z)$ என்பது வகையிடத்தக்க சார்பு என்க. மற்றும் x, y, z என்பவை வகையிடத் தக்க t-ஆல் ஆன சார்புகள் எனில் u என்பது t-இல் வகையிடத் தக்கதான சார்பு ஆகும். மேலும்

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$



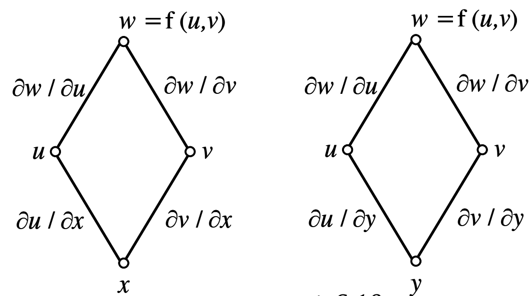
படம் 6.9

கிளைத்தல் வரைபடம் மூன்று மாறிகளின் சங்கிலி விதியை மறக்காதிருக்க உதவும்.

பகுதி வகையீடுகளுக்குரிய சங்கிலி விதி :

$w = f(u,v)$, $u = g(x,y)$, $v = h(x,y)$ எனில்

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \;;\; \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$



படம் 6.10

சமப்படித்தான சார்புகள் :

பல மாறிகளாலான ஒரு சார்பு nஆம் படியில் சமப்படித்தானதாயிருக்க வேண்டுமாயின், ஒவ்வொரு மாறியையும் tஆல் ($t > 0$) பெருக்குவதன் விளைவானது, கொடுக்கப்பட்ட சார்பை t^nஆல் பெருக்குவதற்குச் சமமாக இருத்தலே ஆகும். $f(x,y)$ ஆனது n-ஆம் படியில் சமப்படித்தான சார்பாயின்,

$f(tx, ty) = t^n f(x,y)$ என்ற நிபந்தனை உண்மையாகும்.

யூலரின் தேற்றம் :

$f(x,y)$ என்பது n-ஆம் படி சமப்படித்தான சார்பு எனில்,

$x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf$ ஆகும்.

மேற்குறிப்பு : யூலரின் தேற்றத்தை இரண்டுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.14 : $u(x,y) = x^4 + y^3 + 3x^2y^2 + 3x^2y$ எனில்

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ மற்றும் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ கணக்கிடுக.

தீர்வு :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^2 + 6xy \;;\; \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + 6x^2y + 3x^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 + 6y^2 + 6y \;;\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y + 6x^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 12\,xy + 6x \;;\; \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 12xy + 6x$$

u மற்றும் அதன் முதல் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் ஆகியவை தொடர்ச்சியானதாக உள்ளதால் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ உண்மையாகும் என்பதை கருத்தில் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டு 6.15 : $u = \log(\tan x + \tan y + \tan z)$ எனில் $\sum \sin 2x \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2$ என நிரூபி.

தீர்வு :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sec^2 x}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

$$\sin 2x \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2 \sin x \cos x \, . \sec^2 x}{\tan x + \tan y + \tan z} = \frac{2 \tan x}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

இதைப் போன்று $\sin 2y \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2 \tan y}{\tan x + \tan y + \tan z}$

$\sin 2z \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{2 \tan z}{\tan x + \tan y + \tan z}$ எனக் காணலாம்.

$$\text{L.H.S.} = \sum \sin 2x \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(\tan x + \tan y + \tan z)}{\tan x + \tan y + \tan z} = 2 = \text{R.H.S}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.16 :

$U = (x - y)(y - z)(z - x)$ எனில் $U_x + U_y + U_z = 0$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$U_x = (y - z)\{(x - y)(-1) + (z - x).1\}$$

$$= (y - z)[(z - x) - (x - y)]$$

இதைப்போன்று $U_y = (z - x)[(x - y) - (y - z)]$

$$U_z = (x - y)[(y - z) - (z - x)]$$

$$U_x + U_y + U_z = (y - z)[(z - x) - (z - x)] + (x - y)[-(y - z) + (y - z)] + (z - x)[(x - y) - (x - y)]$$

$$= 0$$

எடுத்துக்காட்டு 6.17 : $z = ye^{x^2}$ என்ற சார்பில் $x = 2t$ மற்றும் $y = 1 - t$ எனுமாறு இருப்பின் $\dfrac{dz}{dt}$ காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{x^2} 2x \;\; ; \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2} \;\; ; \;\; \frac{dx}{dt} = 2 \; ; \; \frac{dy}{dt} = -1$$

$$\frac{dz}{dt} = y\, 2x\, e^{x^2} (2) + e^{x^2}(-1)$$

$$= 4xy\, e^{x^2} - e^{x^2} = e^{4t^2}[(8t(1 - t) - 1)] = e^{4t^2}(8t - 8t^2 - 1)$$

எடுத்துக்காட்டு 6.18 : $w = u^2 e^v$ என்ற சார்பில் $u = \frac{x}{y}$ மற்றும் $v = y \log x$ எனுமாறு இருப்பின் $\frac{\partial w}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial w}{\partial y}$ காண்க.

தீர்வு : $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$; மற்றும் $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 2ue^v \; ; \; \frac{\partial w}{\partial v} = u^2e^v \; ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x} \; ; \; \frac{\partial v}{\partial y} = \log x.$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2ue^v}{y} + u^2e^v \frac{y}{x} = x^y \frac{x}{y^2} (2 + y)$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial y} = 2ue^v \frac{-x}{y^2} + u^2e^v \log x$$

$$= \frac{x^2}{y^3} x^y \; [y\log x - 2],$$ ($u = \frac{x}{y}$ மற்றும் $v = y \log x$ எனப் பிரதியிட)

எடுத்துக்காட்டு 6.19 : $w = x + 2y + z^2$ என்ற சார்பில் $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = t$ எனில் $\frac{dw}{dt}$ காண்க.

தீர்வு : $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1 \; ; \; \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2 \; ; \; \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2\text{z} \; ; \; \frac{dz}{dt} = 1$$

$$\therefore \frac{dw}{dt} = 1(-\sin t) + 2\cos t + 2z = -\sin t + 2\cos t + 2t$$

எடுத்துக்காட்டு 6.20 : $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$க்கு யூலரின் தேற்றத்தை சரிபார்க்க.

தீர்வு : $f(tx, ty) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 x^2 + t^2 y^2}} = \dfrac{1}{t} f(x,y) = t^{-1} f(x, y)$

∴ f என்பது படி -1 உடைய சமப்படித்தான சார்பு. எனவே யூலரின் தேற்றத்தின்படி $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = -f$ ஆகும்.

சரிபார்த்தல் : $f_x = -\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \dfrac{-x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

இதைப் போன்று, $f_y = \dfrac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$ எனக் காணலாம்.

$$x\ f_x + y\ f_y = -\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = -f.$$

யூலரின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 6.21 : u என்பது படி n கொண்ட சமப்படித்தான x, yஇல் அமைந்த சார்பு எனில், $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (n-1)\dfrac{\partial u}{\partial y}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : U என்பது x, yஇல் படி n கொண்ட சமப்படித்தான சார்பு. U_y என்பது x, yஇல் படி $(n-1)$ உடைய சமப்படித்தான சார்பு, யூலரின் தேற்றத்தின்படி U_y க்கு பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது,

$$x(U_y)_x + y\,(U_y)_y = (n-1)\,U_y$$

$$\text{i.e.,}\quad xU_{yx} + y\,U_{yy} = (n-1)\,U_y$$

$$\text{i.e.,}\quad x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (n-1)\frac{\partial u}{\partial y}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.22 : $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ எனில் யூலரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\tan u$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு: R.H.S. சமப்படித்தான சார்பு அல்ல. எனவே

$f = \sin u = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ என வரையறுக்கவும். இப்போது f என்பது, படி $\dfrac{1}{2}$ உடைய சமப்படித்தான சார்பு.

$\therefore$ யூலரின் தேற்றத்தின்படி, $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2} f$

i.e., $x \,.\, \dfrac{\partial}{\partial x}(\sin u) + y\dfrac{\partial}{\partial y}(\sin u) = \dfrac{1}{2}\sin u$

$x\dfrac{\partial u}{\partial x} \,.\, \cos u + y\dfrac{\partial u}{\partial y} \,.\, \cos u = \dfrac{1}{2}\sin u$

$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\tan u$

பயிற்சி 6.3

(1) பின்வரும் சார்புகளுக்கு $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ என்பதை சரிபார்க்க :

(i) $u = x^2 + 3xy + y^2$ (ii) $u = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$

(iii) $u = \sin 3x \cos 4y$ (iv) $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

(2) (i) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ எனில், $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$ எனக்காட்டுக.

(ii) $u = e^{\frac{x}{y}} \sin\dfrac{x}{y} + e^{\frac{y}{x}} \cos\dfrac{y}{x}$ எனில், $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ எனக்காட்டுக.

(3) பின்வருவனவற்றிற்கு சங்கிலி விதியைப் பயன்படுத்தி $\dfrac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dt}}$-ஐ கணக்கிடுக.

(i) $w = e^{xy}$. இங்கு $x = t^2$, $y = t^3$

(ii) $w = \log(x^2 + y^2)$. இங்கு $x = e^t$, $y = e^{-t}$

(iii) $w = \dfrac{x}{(x^2 + y^2)}$ இங்கு $x = \cos t$, $y = \sin t$.

(iv) $w = xy + z$ இங்கு $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$

(4) (i) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ என்று இருக்குமாறு $w = \log(x^2 + y^2)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ மற்றும் $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ ஐக் காண்க.

(ii) $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ என்று இருக்குமாறு $w = x^2 + y^2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ மற்றும் $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ ஐக் காண்க.

(iii) $x = u + v$, $y = u - v$ என்று இருக்குமாறு $w = \sin^{-1}(xy)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், $\frac{\partial w}{\partial u}$ மற்றும் $\frac{\partial w}{\partial v}$ ஐக் காண்க.

(5) யூலரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க:

(i) $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$ எனில் $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ என நிரூபிக்க.

(ii) $u = xy^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ எனில் $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u$ எனக் காட்டுக.

(iii) u என்பது x, yஇல் n-ஆம் படி சமப்படித்தான சார்பாயின் $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = (n-1)\frac{\partial u}{\partial x}$ என நிறுவுக.

(iv) $V = ze^{ax + by}$ மற்றும் z ஆனது x, y-இல் nஆம் படி சமப்படித்தான சார்பாயின் $x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} = (ax + by + n)V$ என நிறுவுக.

7. தொகை நுண்கணிதம் : பயன்பாடுகள்
(INTEGRAL CALCULUS AND ITS APPLICATIONS)

7.1 அறிமுகம் :

11ஆம் வகுப்பில், வரையறுத்த தொகையினை கூடுதலின் எல்லை மதிப்பின் மூலமாக கண்டோம். கொடுக்கப்பட்ட தொகைச் சார்பு மிக எளிமையாக இருப்பினும் வரையறுத்த தொகையினை கூடுதலின் எல்லை மதிப்பின் மூலமாக காண்பது மிகவும் கடினமான ஒன்றாகும். இம்முறைக்கு மாறாக மிக எளிமையான வழியில் வரையறுத்தத் தொகையினைக் காண இரண்டாம் அடிப்படை நுண்கணிதத் தேற்றம் வழி வகுக்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட தொகைச் சார்பின் தொகையினை வகையிடலின் எதிர்மறை முறையின் மூலம் கண்டு, வரையறுத்த தொகையினை காணும் முறையே இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றமாகும். வகையிடலுக்கும் தொகையிடலுக்கும் உள்ள உறவின் மூலம் கணக்கிடும் முறையை கண்டறிந்தவர்கள் நியூட்டன் (Newton), லிபினிட்ஸ் (Leibnitz) என்ற அறிவியல் அறிஞர்கள் ஆவார்கள்.

இப்பகுதியில் வரையறுத்தத் தொகையின் கொள்கையையும் பயன்பாடுகளையும் பற்றி கீழ்க்காணும் ஐந்து பிரிவுகளில் காண்போம் :

(i) எளிமையான கணக்குகளை இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றதின் மூலம் தீர்வு காணுதல்.

(ii) வரையறுத்தத் தொகையின் பண்புகள்

(iii) குறைப்பு வாய்ப்பாடு (Reduction formulae)

(iv) வளைவரையால் உருவாக்கப்படும் பரப்பு மற்றும் பரப்பினை அச்சைப் பொறுத்து சுழற்றுவதால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு.

(v) வளைவரையின் நீளம் மற்றும் சுழற்சியால் ஏற்படும் வளைப்பரப்பு.

7.2. எளிய வரையறுத்தத் தொகைகள் (Simple definite integrals):

முதல் நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம் :

தேற்றம் 7.1 : $f(x)$ என்ற சார்பு தொடர்ச்சி உடையதாகவும் மற்றும் $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ எனில், $F'(x) = f(x)$ ஆகும்.

இரண்டாவது நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம் :

தேற்றம் 7.2 : $f(x)$ என்ற சார்பு $a \le x \le b$ என்ற சார்பகத்தில் தொடர்ச்சி உடையதாக இருப்பின் $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. இங்கு f என்ற சார்பின் எதிர்முறை வகையீடு F ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு 7.1 : மதிப்பிடுக : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

தீர்வு : $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$ என்க.

$t = \cos x$ என்க

$dt = -\sin x\, dx$ (அல்லது) $\sin x\, dx = -dt$

$t = \cos x$

x	0	$\pi / 2$
t	1	0

$$\therefore I = \int_1^0 \frac{-dt}{1 + t^2} = -\left[\tan^{-1} t\right]_1^0 = -\left[0 - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.2 : மதிப்பிடுக : $\int_0^1 x\, e^x\, dx$

தீர்வு :

பகுதித் தொகையிடல் முறைப்படி

$\left(\int udv = uv - \int v\, du\right)$

இங்கு $u = x$

$du = dx$

$dv = e^x\, dx$

$v = e^x$

$$\int_0^1 x\, e^x\, dx = (xe^x)_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx$$

$$= e - (e^x)_0^1$$

$$= e - (e - 1)$$

$$= 1$$

எடுத்துக்காட்டு 7.3 : மதிப்பிடுக : $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

தீர்வு : $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$$= \left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a} - (0 + 0)\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.4 : மதிப்பிடுக : $\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx$

தீர்வு : $\int e^{ax}\cos bx\, dx = \left(\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\right)(a\cos bx + b\sin bx)$ ஆகும்.

$$\therefore \int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx = \left[\left(\frac{e^{2x}}{2^2 + 1^2}\right)(2\cos x + \sin x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{e^{\pi}}{5}(0 + 1) - \frac{e^0}{5}(2 + 0)$$

$$= \frac{e^{\pi}}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2)$$

பயிற்சி 7.1

இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(1) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$ (2) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$ (3) $\int_0^1 \sqrt{9 - 4x^2}\, dx$

(4) $\int_0^{\pi/4} 2\sin^2 x \sin 2x\, dx$ (5) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ (6) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{9 + \cos^2 x}$

(7) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$ (8) $\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ (9) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos x\, dx$

(10) $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$ (11) $\int_0^{\pi/2} e^{3x}\cos x\, dx$ (12) $\int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin x\, dx$

7.3. வரையறுத்தத் தொகையிடலின் பண்புகள் (Properties of Definite Integrals) :

பண்பு (1) : $$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)\,dy}$$

நிரூபணம் : f என்ற சார்பின் எதிர்முறை வகையீடு F என்க.

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = [F(b) - F(a)] \qquad \dots \text{(i)}$$

$$\int_a^b f(y)\,dy = [F(b) - F(a)] \qquad \dots \text{(ii)}$$

(i) மற்றும் (ii)இலிருந்து $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$

அதாவது எல்லைகள் மாறாமல் இருக்கும் போது மாறியின் பெயரை மாற்றுவதால் தொகையிடலின் மதிப்பு மாறாது.

பண்பு (2) : $$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

நிரூபணம் : f என்ற சார்பின் எதிர்முறை வகையீடு F என்க.

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = [F(b) - F(a)] \qquad \dots \text{(i)}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = [F(a) - F(b)] = -[F(b) - F(a)] \qquad \dots \text{(ii)}$$

(i) மற்றும் (ii)இலிருந்து $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

∴ வரையறுத்த தொகையிடலில் எல்லைகளை இடமாற்றம் செய்யும் போது வரையறுத்தத் தொகையிடலின் குறியீடு மட்டுமே மாறுபடும்.

பண்பு (3) : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

நிரூபணம் : $u = a + b - x$ என்க.

$\therefore\ du = -dx$

அல்லது $dx = -du$

$u = a + b - x$

x	a	b
u	b	a

$$\therefore \int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_b^a f(u)\,du = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$$

பண்பு (4) : $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

நிரூபணம் : $u = a - x$ என்க.

$\therefore\ du = -dx$

அல்லது $dx = -du$

$u = a - x$

x	o	a
u	a	o

$$\therefore \int_0^a f(a-x)dx = -\int_a^o f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du = \int_0^a f(x)\,dx$$

பண்பு (5) (நிரூபணமின்றி) : $f(x)$ என்ற சார்பு a, b, c என்ற மூன்று எண்களை உள்ளடக்கிய ஒரு மூடிய இடைவெளியில் தொகையிடத்தக்கதாக இருப்பின்

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

இங்கு a, b, c ஆகியவற்றின் வரிசை மாறுபடலாம்.

பண்பு (6) : $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

நிரூபணம் : பண்பு (5)இன்படி $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx \quad \ldots (1)$

$u = 2a - x$

x	a	$2a$
u	a	o

$x = 2a - u$, $dx = -du$ என R.H.S.இல் உள்ள இரண்டாவது தொகையீடு பகுதியில் பிரதியிட,

$$\int_a^{2a} f(x)dx = -\int_a^{o} f(2a-u)\,du$$

$$= \int_0^{a} f(2a-u)\,du$$

$$= \int_0^{a} f(2a-x)\,dx \qquad \left(\because \int_a^{b} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(y)\,dy\right)$$

(1)இலிருந்து $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(2a-x)\,dx$

***பண்பு* (7) :** $f(2a-x) = f(x)$ *எனில்* $\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$

மற்றும் $f(2a-x) = -f(x)$ *எனில்* $\int_0^{2a} f(x)dx = 0$

***நிரூபணம்* :** $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(2a-x)\,dx \qquad \ldots (1)$

என நாம் அறிந்துள்ளோம்.

$f(2a-x) = f(x)$ *எனில்,* (1)இலிருந்து

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$$

$f(2a-x) = -f(x)$ *எனில்,* (1)இலிருந்து

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^{a} f(x)\,dx - \int_0^{a} f(x)\,dx = 0$$

***பண்பு* (8):** (i) $f(x)$ *ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பு எனில்* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$

(ii) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பு எனில் $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

நிரூபணம் : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ *(பண்பு 5இன் படி)* … (1)

x = – *t* *மற்றும்* *dx* = – *dt* *(என* R.H.S.*இல் உள்ள முதலாவது தொகையீடு பகுதியில் பிரதியிட,*

x = – *t*

x	– *a*	0
t	*a*	0

∴ (1)இலிருந்து $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{o} f(-t)\,(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \ldots (2)$$

***நிலை* (i) :** $f(x)$ ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பு

$$(2) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

***நிலை* (ii) :** $f(x)$ ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பு

$$(2) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} (-f(x))\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 7.5 : *மதிப்பிடுக :* $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^3 \sin^2 x \, dx.$

தீர்வு : $f(x) = x^3 \sin^2 x = x^3 (\sin x)^2$ *என்க.*

$$\therefore f(-x) = (-x)^3 (\sin(-x))^2$$
$$= (-x)^3 (-\sin x)^2$$
$$= -x^3 \sin^2 x$$
$$= -f(x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ *ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பு*

$\therefore \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^3 \sin^2 x \, dx = 0$ (*பண்பு* (8)*இன் படி*)

எடுத்துக்காட்டு 7.6 : *மதிப்பிடுக:* $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{3-x}{3+x}\right) dx$

தீர்வு : $f(x) = \log\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ *என்க.*

$$\therefore f(-x) = \log\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = \log(3+x) - \log(3-x)$$
$$= -\left[\log(3-x) - \log(3+x)\right]$$
$$= -\left[\log\left(\frac{3-x}{3+x}\right)\right] = -f(x)$$

$f(-x) = -f(x) \quad \therefore f(x)$ *ஒரு ஒற்றைப்படைச் சார்பு.*

$$\therefore \int_{-1}^{1} \log\left(\frac{3-x}{3+x}\right) dx = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 7.7 : *மதிப்பிடுக :* $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x \, dx$

தீர்வு : $f(x) = x \sin x$ *என்க.*

$$f(-x) = (-x)\sin(-x)$$
$$= x \sin x \quad (\because \sin(-x) = -\sin x)$$

$\therefore f(x)$ *ஒரு இரட்டைப்படைச் சார்பு*

$$\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x \, dx = 2 \int_{0}^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

$$= 2\left[\{x(-\cos x)\}_{0}^{\pi/2} - \int_{0}^{\pi/2} (-\cos x) dx\right]$$ பகுதி தொகையிடல் முறைப்படி

$$= 2\left[0 + \int_{0}^{\pi/2} \cos x \, dx\right] = 2\,[\sin x]_{0}^{\pi/2}$$

$$= 2\,[1 - 0] = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 7.8 : *மதிப்பிடுக :* $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$

தீர்வு : $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$ *என்க.*

$$f(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$$

எனவே $f(x)$ *ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பு ஆகும்.*

$$\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = 2 \times \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/2} (1 - \cos 2x) \, dx$$

$$= \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.9 : *மதிப்பிடுக :* $\int_{0}^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} \, dx$

தீர்வு : $I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} \, dx$ *என்க.* … (1)

$$= \int_{0}^{\pi/2} \frac{f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)}{f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)} \, dx$$

$$\therefore\ I = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x) + f(\sin x)}\, dx \qquad \ldots (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ $$2I = \int_o^{\pi/2} \frac{f(\sin x) + f(\cos x)}{f(\cos x) + f(\sin x)}\, dx = \int_o^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.10 : *மதிப்பிடுக :* $\int_0^1 x(1-x)^n\, dx$

தீர்வு : $I = \int_0^1 x(1-x)^n\, dx$ *என்க.*

$$= \int_0^1 (1-x)\,[1-(1-x)]^n\, dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_o^a f(a-x)\,dx\right]$$

$$= \int_0^1 (1-x)\,x^n\, dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\, dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] = \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\int_0^1 x(1-x)^n\, dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.11 : *மதிப்பிடுக :* $\int_0^{\pi/2} \log(\tan x)dx$

தீர்வு : $I = \int_0^{\pi/2} \log(\tan x)dx$ *என்க.* … (1)

$$= \int_0^{\pi/2} \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \log(\cot x)\, dx \qquad \ldots (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$

$$2I = \int_0^{\pi/2} [\log(\tan x) + \log(\cot x)]\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} [\log(\tan x) . (\cot x)]\, dx = \int_0^{\pi/2} (\log 1)\, dx = 0$$

$$\therefore\ I = 0 \qquad (\because \log 1 = 0)$$

எடுத்துக்காட்டு 7.12 : *மதிப்பிடுக :* $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\cot x}}$

தீர்வு : $\displaystyle I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\cot x}}$ *என்க.*

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx \qquad \ldots (1)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}\, dx}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}}$$

$$\left(\because \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}\, dx$$

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\, dx \qquad \ldots (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$

$$2I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\, dx$$

$$2I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} dx = [x]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{12}$$

பயிற்சி 7.2

பின்வருவனவற்றை வரையறுத்த தொகையின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி மதிப்புக் காண்க.

(1) $\int_{-1}^{1} \sin x \cos^4 x\, dx$

(2) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^3 \cos^3 x\, dx$

(3) $\int_{0}^{\pi/2} \sin^3 x \cos x\, dx$

(4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$

(5) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\ \cos x\, dx$

(6) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x \sin^2 x\, dx$

(7) $\int_{0}^{1} \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$

(8) $\int_{0}^{3} \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x} + \sqrt{3 - x}}$

(9) $\int_{0}^{1} x (1 - x)^{10}\, dx$

(10) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$

7.4. குறைப்பு சூத்திரம் (Reduction formulae) :

n-வது குறியீட்டு சார்பின் தொகையீட்டினை (n–1)-வது குறியீட்டு சார்பின் தொகையீடு மூலம் கொடுக்கப்படும் சூத்திரம் குறைப்பு சூத்திரம் என அழைக்கப்படும்.

$\int \sin^n x\, dx$. $\int \cos^n x\, dx$இன் குறைப்பு சூத்திரம் (n ஓர் மிகை முழு எண்) :

***முடிவு* 1 :** $I_n = \int \sin^n x\, dx$ எனில் $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

***முடிவு* 2:** $I_n = \int \cos^n x\, dx$ எனில் $I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

***முடிவு* 3 :**

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1 & , n\text{-ஒற்றைப்படை} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & , n\text{ -இரட்டைப்படை} \end{cases}$$

***குறிப்பு* :** இம்முடிவுகளின் நிரூபணங்களுக்கு **கூடுதல் சேர்ப்பு பகுதி**யினை காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 7.13 : மதிப்பிடுக : $\int \sin^5 x\, dx$

***தீர்வு* :** $I_n = \int \sin^n x\, dx$ எனில்,

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \ldots \text{(I)}$$

$$\therefore \int \sin^5 x\, dx = I_5$$

$$= -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x + \frac{4}{5} I_3 \qquad (n=5 \text{ என I இல் பிரதியிட})$$

$$= -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x + \frac{4}{5}\left[-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x + \frac{2}{3} I_1\right]$$

(n=3 என Iஇல் பிரதியிட)

$$\int \sin^5 x\, dx = -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x - \frac{4}{15}\sin^2 x\cos x + \frac{8}{15} I_1 \qquad \ldots \text{(II)}$$

$$I_1 = \int \sin^1 x\, dx = -\cos x + c$$

$$\therefore \int \sin^5 x\,dx = -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x - \frac{4}{15}\sin^2 x\cos x - \frac{8}{15}\cos x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 7.14 : *மதிப்பிடுக* : $\int \sin^6 x\,dx$

தீர்வு : $I_n = \int \sin^n x\,dx$ *எனில்,*

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \qquad \ldots \text{(I)}$$

$$\therefore \int \sin^6 x\,dx = I_6$$

$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}I_4$$ (n=6 *என* I*இல் பிரதியிட*)

$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\left[-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}I_2\right]$$

(n=4 *என* I*இல் பிரதியிட*)

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x + \frac{5}{8}I_2$$

(n=2 *என* I*இல் பிரதியிட*)

$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x + \frac{5}{8}\left[-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}I_0\right]$$

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5}{16}I_0$$

$$I_0 = \int \sin^0 x\,dx = \int dx = x$$

$$\therefore \int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5}{16}x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 7.15 : *மதிப்பிடுக* :

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx$ (iii) $\int_0^{2\pi} \sin^9 \frac{x}{4}\,dx$

(iv) $\int_0^{\pi/6} \cos^7 3x\,dx$

தீர்வு : (i) n *ஒற்றைப்படையாதலால்,*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\, dx = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{35}$$

(ii) n இரட்டைப்படையாதலால்,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^8 x\, dx = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256}$$

(iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^9 \frac{x}{4}\, dx$

$\frac{x}{4} = t$ என்க.

$\therefore dx = 4dt$

$t = x / 4$

x	0	2π
t	0	$\pi/2$

$$\int_0^{2\pi} \sin^9 \frac{x}{4}\, dx = 4\int_0^{\pi/2} \sin^9 t\, dt = 4.\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\right) = \frac{512}{315}$$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^7 3x\, dx$

$3x = t$ என்க.

$3dx = dt$

$dx = 1/3\, dt$

$t = 3x$

x	0	$\pi/6$
t	0	$\pi/2$

$$\int_0^{\pi/6} \cos^7 3x\, dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^7 t\, dt = \frac{1}{3}\left[\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\right] = \frac{16}{105}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.16 : மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^2 x\, dx$

தீர்வு : $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \, dx$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^4 x - \sin^6 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}$$

இரண்டு முக்கிய முடிவுகள் :

பின்வரும் இரண்டு முடிவுகள், சிலவகை தொகையீடுகளை மதிப்பிட மிகவும் பயன் உள்ளதாக அமையும்.

(1) u, v *என்பன* x*ஆல் ஆன சார்புகள் எனில்,*

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots + (-1)^n u^n v_n + \ldots$$

இங்கு $u', u'', u''' \ldots$ *என்பன* u*இன் தொடர் வகைக்கெழுக்கள் ஆகும்.* $v_1, v_2, v_3 \ldots$ *என்பன* v*இன் தொடர் வகையீடுகள் ஆகும்.*

இச்சூத்திரம் ***பெர்னோலி*** *சூத்திரம் எனப்படும்.*

$u = x^n$ (n*-மிகை முழுஎண்) எனில் பெர்னோலி சூத்திரம் பயன்படுத்துவது அனுகூலமானது.*

(2) n *ஓர் மிகை முழு எண் எனில்,* $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{\lfloor n}{a^{n+1}}$

குறிப்பு : *இச்சூத்திரம் காமா* (Gamma) *தொகையிடுதலின் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையாகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 7.17 : *மதிப்பிடுக :*

(i) $\int x^3 e^{2x} \, dx$ (ii) $\int_0^1 x e^{-4x} \, dx$ (iii) $\int_0^{\infty} x^5 e^{-4x} \, dx$ (iv) $\int_0^{\infty} e^{-mx} x^7 \, dx$

தீர்வு :

(1) $\int x^3 e^{2x} \, dx$

$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 \ldots$ *என்ற பெர்னோலி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால்*

	$dv = e^{2x} \, dx$
$u = x^3$	$v = (1/2) e^{2x}$
$u' = 3x^2$	$v_1 = (1/4) e^{2x}$
$u'' = 6x$	$v_2 = (1/8) e^{2x}$
$u''' = 6$	$v_3 = (1/16) e^{2x}$

$$\int x^3 e^{2x}\,dx = (x^3)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - (3x^2)\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right) + (6x)\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right) - (6)\left(\frac{1}{16}e^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\left[x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3x}{2} - \frac{3}{4}\right] + c$$

(ii) $\int_0^1 x\,e^{-4x}\,dx$

$dv = e^{-4x}\,dx$

$u = x \quad v = -\frac{1}{4}e^{-4x}$

$u' = 1 \quad v_1 = \frac{1}{16}e^{-4x}$

பெர்னோலி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால்

$$\int_0^1 x\,e^{-4x}\,dx = \left[(x)\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right) - (1)\left(\frac{1}{16}e^{-4x}\right)\right]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{4}e^{-4} - 0\right) - \frac{1}{16}(e^{-4} - e^0) = \frac{1}{16} - \frac{5}{16}e^{-4}$$

(iii) $\int_0^\infty x^5 e^{-4x}\,dx = \frac{\lfloor 5}{4^6}$ *(காமா தொகையீட்டை பயன்படுத்த)*

(iv) $\int_0^\infty e^{-mx}x^7\,dx = \frac{\lfloor 7}{m^8}$ *(காமா தொகையீட்டை பயன்படுத்த)*

பயிற்சி 7.3

(1) *மதிப்பிடுக* : (i) $\int \sin^4 x\,dx$ (ii) $\int \cos^5 x\,dx$

(2) *மதிப்பிடுக* : (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^9 x\,dx$

(3) *மதிப்பிடுக* : (i) $\int_0^{\pi/4} \cos^8 2x\,dx$ (ii) $\int_0^{\pi/6} \sin^7 3x\,dx$

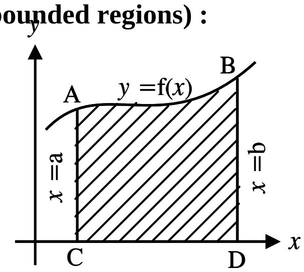
(4) *மதிப்பிடுக* : (i) $\int_0^1 x\,e^{-2x}\,dx$ (ii) $\int_0^\infty x^6 e^{-x/2}\,dx$

7.5 பரப்பு மற்றும் கன அளவு (Area and Volume) :

இப்பகுதியில் வரையறுத்த தொகையைப் பயன்படுத்தி பரப்பினை அளவிடுதல் மற்றும் பரப்பினைச் சுழற்றுவதால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு ஆகியவற்றை கணக்கிடும் முறையை காண்போம். இங்கு பரப்பளவு, கன அளவு இவற்றின் மதிப்புகளை, அதைச் சார்ந்த அலகுகள் குறிக்காமலே வெறும் எண்களைக் கொண்டு மதிப்பிகிறோம்.

7.5.1 அரங்கத்தின் பரப்பு காணல் (Area of bounded regions) :

தேற்றம் : $y = f(x)$ என்ற தொடர்ச்சியான சார்பு $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது. மேலும் $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் மிகை மதிப்பு உள்ளதாக இருப்பின் (அதாவது x-அச்சின் மீது அல்லது x-அச்சிற்கு மேல் $f(x)$ அமைகிறது)

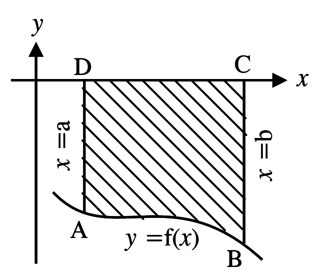


படம் 7.1

$y = f(x)$ என்ற வளைவரை $x = a$, $x = b$ என்ற கோடுகள் மற்றும் x-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் **பரப்பு** $= \int_a^b f(x)dx$ அல்லது $\int_a^b y dx$ ஆகும்.

மேலும் $[a, b]$இல் உள்ள எல்லா xக்கும் $f(x) \le 0$ (அல்லது $f(x)$ ஆனது, x-அச்சின் மீது அல்லது x-அச்சிற்கு கீழ் அமைந்தால்) எனில் மேலே குறிப்பிட்ட அரங்கத்தின்

பரப்பு $= \int_a^b (-y)\, dx = \int_a^b (-f(x))\, dx$



படம் 7.2

(i.e., x-அச்சின் கீழ் அமையும் பரப்பு குறைமதிப்பு)

எடுத்துக்காட்டு 7.18 :

$3x - 2y + 6 = 0$ என்ற கோடு $x = 1$, $x = 3$ என்ற கோடுகள் (ordinates) மற்றும் x-அச்சு ஆகியவற்றால் ஏற்படும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : 3*x* – 2*y* + 6 = 0 என்ற கோடு [1, 3] என்ற இடைவெளியில் *x*-அச்சிற்கு மேல் அமைகிறது.

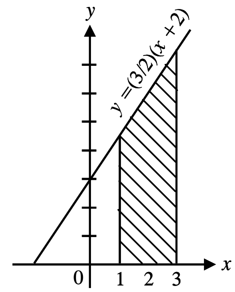
(i.e., $y > 0, \forall x \in (1,3)$)

தேவையான பரப்பு

$$A = \int_1^3 y\,dx = \frac{3}{2}\int_1^3 (x+2)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^3$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}(9-1) + 2(3-1)\right] = \frac{3}{2}[4+4]$$



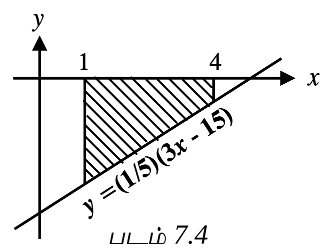
படம் 7.3

பரப்பு = 12 சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 7.19: 3*x* – 5*y* – 15 = 0 என்ற கோடு மற்றும் *x* = 1, *x* = 4 எனும் கோடுகள் மற்றும் *x*-அச்சு ஆகியவற்றால் ஏற்படும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : *x* = 1 மற்றும் *x* = 4இல் 3*x* – 5*y* – 15 = 0 என்ற கோடு *x*-அச்சிற்கு கீழ் அமைகிறது.

$\therefore$தேவையான பரப்பு$= \int_1^4 (-y)\,dx$



படம் 7.4

$$= \int_1^4 -\frac{1}{5}(3x-15)\,dx = \frac{3}{5}\int_1^4 (5-x)\,dx = \frac{3}{5}\left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_1^4$$

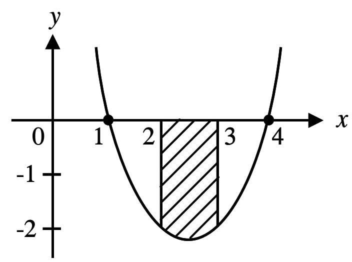
$$= \frac{3}{5}\left[5(4-1) - \frac{1}{2}(16-1)\right]$$

$$= \frac{3}{5}\left[15 - \frac{15}{2}\right] = \frac{9}{2}$$ சதுர அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 7.20:

$y = x^2 - 5x + 4$ என்ற வளைவரை, *x* = 2, *x* = 3 எனும் கோடுகள் மற்றும் *x*-அச்சு ஆகியவற்றால் ஏற்படும் அரங்கத்தின் பரப்பினைக் காண்க.

தீர்வு : $2 \leq x \leq 3$ என்ற இடைவெளியில் *x*-இன் மதிப்புகளுக்கு வளைவரை *x*- அச்சிற்கு கீழ் அமைகிறது.



படம் 7.5

தேவையான பரப்பு = $\int_{2}^{3} (-y)\, dx$

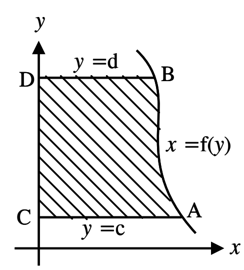
$= \int_{2}^{3} -(x^2 - 5x + 4)\, dx$

$= -\left[\dfrac{x^3}{3} - 5\,\dfrac{x^2}{2} + 4x\right]_2^3$

$= -\left[\left(9 - \dfrac{45}{2} + 12\right) - \left(\dfrac{8}{3} - \dfrac{20}{2} + 8\right)\right] = -\left[\dfrac{-13}{6}\right] = \dfrac{13}{6}$ சதுர அலகுகள்

***y*-அச்சு மற்றும் ஒரு தொடர்ச்சியான வளைவரைக்கும் இடையே உள்ள பரப்பு :**

$x = f(y)$ என்பது $[c, d]$இல் வரையறுக்கப்பட்ட *y*-இன் தொடர்ச்சியான ஒரு சார்பு என்க. $x = f(y)$ என்ற வளைவரை $y = c$, $y = d$ என்ற கோடுகள் மற்றும் *y*-அச்சு ஆகியவற்றால் ஏற்படும் அரங்கம் *y*-அச்சின் வலப்புறம் அமைந்திருப்பின் அதன்

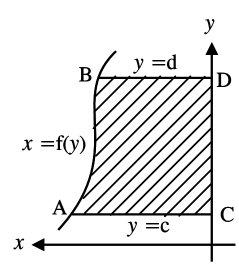


படம் 7.6

பரப்பு = $\int_{c}^{d} f(y)\, dy$ அல்லது $\int_{c}^{d} x dy$

ஆகும்.

மேற்குறிப்பிட்ட அரங்கம் *y*-அச்சுக்கு இடப்புறமிருப்பின் அவ்வரங்கத்தின் பரப்பு



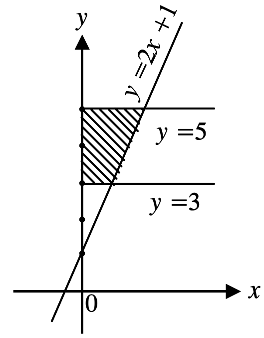
படம் 7.7

பரப்பு = $\int_{c}^{d} (-x)\, dy$ அல்லது $\int_{c}^{d} -f(y)\, dy$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.21:

$y = 2x + 1$ என்ற கோடு $y = 3$, $y = 5$ எனும் கோடுகள் மற்றும் *y*–அச்சு ஆகியவற்றால் ஏற்படும் அரங்கத்தின் பரப்பினைக் காண்க.



படம் 7.8

தீர்வு :

$y = 3$ மற்றும் $y = 5$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையே $y = 2x + 1$ எனும் கோடு *y*-அச்சின் வலப்புறம் அமைகிறது.

$$\therefore \text{ தேவையான பரப்பு } A = \int_c^d x\,dy$$

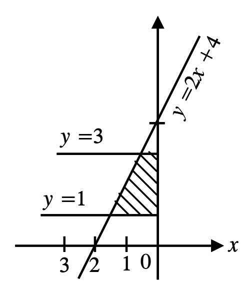
$$= \int_3^5 \frac{y-1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_3^5 (y-1)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2} - y\right]_3^5 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{25}{2} - \frac{9}{2}\right) - (5-3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[8-2] = 3 \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.22: $y = 2x + 4$ என்ற கோடு $y = 1$, $y = 3$ என்ற கோடுகள் மற்றும் *y*-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பினைக் காண்க.

தீர்வு : $y = 1$ மற்றும் $y = 3$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையே $y = 2x + 4$ எனும் கோடு *y*-அச்சின் இடப்புறத்தில் அமைகிறது.



படம் 7.9

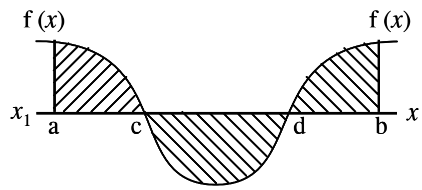
$$\therefore \text{ பரப்பு } \quad A = \int_1^3 (-x)\,dy$$

$$= \int_1^3 -\left(\frac{y-4}{2}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 (4-y)dy = \frac{1}{2}\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}[8-4] = 2 \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

மேற்குறிப்பு :

f என்ற தொடர்ச்சியான வளைவரை *x*-அச்சினைக் குறுக்கிட்டால், தொகையீடு $\int_a^b f(x)\,dx$ இன் மதிப்பானது *x*-அச்சிற்கு கீழ் உள்ள பரப்பை குறை என்று எடுத்துக் கொண்டு, குறை குறியீட்டை நீக்கி கூடுதல் காண வேண்டும்.



படம் 7.10

$$\int_a^b f(x)\,dx) = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{அச்சிற்கு மேல்}} + \underbrace{\int_c^d (-f(x))\,dx}_{\text{அச்சிற்கு கீழ்}} + \underbrace{\int_d^b f(x)\,dx}_{\text{அச்சிற்கு மேல்}}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.23: (i) மதிப்பு காண்க : $\int_1^5 (x-3)dx$

(ii) $y + 3 = x$, $x = 1$ மற்றும் $x = 5$ ஆகிய கோடுகளால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு காண்க.

தீர்வு :

(i) $$\int_1^5 (x-3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^5 = \left(\frac{25}{2} - 15\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right) = 12 - 12 = 0 \ \dots \ \text{I}$$

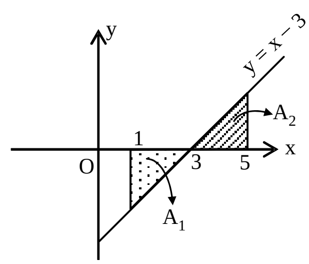
(ii) $y = x - 3$ என்ற கோடு *x*-அச்சை $x = 3$ என்ற புள்ளியில் குறுக்கிடுகிறது.

படத்தின் மூலம் A_1, *x*-அச்சுக்கு கீழே அமைகிறது என்பது தெளிவாகிறது.

$$\therefore A_1 = \int_1^3 (-y)\,dx.$$

A_2, *x*-அச்சுக்கு மேல் அமைவதால்,

$$A_2 = \int_3^5 y\,dx$$



படம் 7.11

$\therefore$ மொத்த பரப்பு $= \int_1^5 (x-3)dx = \int_1^3 -(x-3)\,dx + \int_3^5 (x-3)\,dx$

$= (6-4) + (8-6)$

$= 2 + 2$

$= 4$ சதுர அலகுகள் … (II)

குறிப்பு : I மற்றும் IIஇன் மூலம் $f(x)$-இன் தொகையீடு என்பது எப்பொழுதுமே பரப்பைத் தருவதில்லை என்பது தெளிவாகிறது. $f(x)$ மிகையில்லாமல் இருப்பினும் எதிர்முறை மூலம் தொகைக் காணலாம் என அடிப்படைத் தேற்றம் மூலம் தெரிய வருகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 7.24:

$y = \sin 2x$ என்ற வளைவரை, $x = 0$, $x = \pi$ மற்றும் x-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பினைக் காண்க.

தீர்வு : $y = \sin 2x$ என்ற வளைவரை x-அச்சை சந்திக்கும் புள்ளிகளைக் காண $y = 0$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

$$\sin 2x = 0 \;\Rightarrow\; 2x = n\pi\,,\; n \in Z$$

$$\therefore\; x = \frac{n}{2}\pi. \quad \text{i.e., } x = \left\{0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm 3\frac{\pi}{2}\ldots\right\}$$

$\therefore$ $x = 0$ மற்றும் $x = \pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையே x பெறும் மதிப்புகள் $x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$

முதல் வளையின் எல்லைகள் x-அச்சிற்கு மேல் அமைகிறது. இதன் எல்லைகள் $0, \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

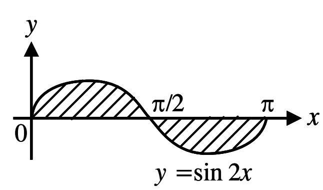
இரண்டாவது வளைx-அச்சிற்கு கீழ் அமைகிறது. இதன் எல்லைகள் $\frac{\pi}{2}$, π ஆகும்.

$\therefore$தேவையான பரப்பு

$$A = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\sin 2x)dx$$

$$= \left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)_0^{\pi/2} + \left(\frac{\cos 2x}{2}\right)_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}[-\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi]$$



படம் 7.12

$= \frac{1}{2}[1 + 1 + 1 + 1] = 2$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 7.25: $y = x^2 - x - 2$ என்ற வளைவரை $x = -2$, $x = 4$ என்ற கோடுகள் மற்றும் x-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : $y = x^2 - x - 2$

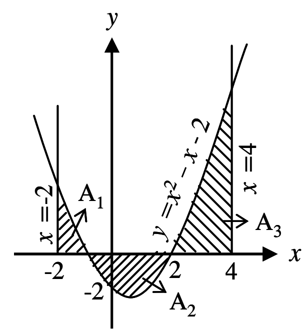
$= (x + 1)(x - 2)$

வளைவரையானது $x = -1$ மற்றும் $x = 2$இல் x-அச்சை வெட்டுகிறது.

தேவையான பரப்பு $= A_1 + A_2 + A_3$

A_2 என்ற பகுதி x-அச்சிற்கு கீழ் அமைகிறது

$$\therefore A_2 = -\int_{-1}^{2} y\, dx$$



படம் 7.13

$\therefore$ தேவையான பரப்பு

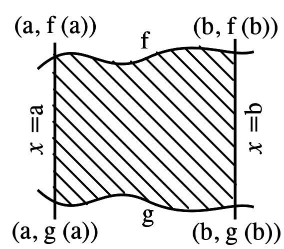
$$= \int_{-2}^{-1} y\, dx + \int_{-1}^{2} (-y) dx + \int_{2}^{4} y\, dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)\, dx + \int_{-1}^{2} -(x^2 - x - 2) dx + \int_{2}^{4} (x^2 - x - 2)\, dx$$

$$= \frac{11}{6} + \frac{9}{2} + \frac{26}{3} = 15 \text{ சதுர அலகுகள்}$$

பரப்பளவின் பொது தத்துவம் :

$y = f(x)$ மற்றும் $y = g(x)$ என்ற வளைவரைகள் தொடர்ச்சியானதாகவும் $f(x)$ ஆனது $g(x)$இன் மேல்பகுதியில் அமையும்படியாகவும் உள்ளது என்க. இப்போது $y = f(x)$, $y = g(x)$ மற்றும் $x = a$, $x = b$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள அரங்கத்தின் பரப்பு R ஆனது $R = \int_{a}^{b} (f - g) dx$ ஆகும்.



படம் 7.14

f மற்றும் g எங்கு அமைய வேண்டும் என்ற கட்டுப்பாடு தேவையில்லை. இரண்டுமே x-அச்சிற்கு மேல் அல்லது கீழ் அமையலாம். அல்லது gஆனது x-அச்சிற்கு கீழேயும் f ஆனது x-அச்சிற்கு மேலேயும் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.26: $y = x + 1$ என்ற கோட்டிற்கும் $y = x^2 - 1$என்ற வளைவரைக்கும் இடையே உள்ள அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : வளைவரைகள் வெட்டும் புள்ளி காண அவற்றின் சமன்பாடுகளான $y = x + 1$ மற்றும் $y = x^2 - 1$-ஐ தீர்க்க வேண்டும்.

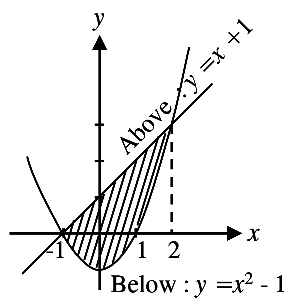
$$x^2 - 1 = x + 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$\therefore x = -1$ அல்லது $x = 2$

$\therefore$ நேர்கோடானது வளைவரையை $x = -1$ மற்றும் $x = 2$ல் வெட்டுகிறது,



படம் 7.15

தேவையான பரப்பு $= \int\limits_a^b \left[\underset{\text{மேல்}}{f(x)} - \underset{\text{கீழ்}}{g(x)} \right] dx$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left[(x + 1) - (x^2 - 1) \right] dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} [2 + x - x^2] dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2}$$

$= \left[4 + 2 - \frac{8}{3} \right] - \left[-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] = \frac{9}{2}$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 7.27: $y = x^3$ என்ற வளைவரைக்கும் $y = x$ என்ற கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : முதல் கால் பகுதியில் $y = x$ என்ற கோடு $y = x^3$ என்ற பரவளையத்திற்கு மேல் செல்கிறது. மூன்றாவது கால் பகுதியில் $y = x^3$ என்ற பரவளையம் $y = x$ என்ற கோட்டிற்கு கீழே உள்ளது. வெட்டும் புள்ளிகள் காண சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க வேண்டும்.

$y = x^3, y = x \Rightarrow x^3 = x$. $x = \{0, \pm 1\}$எனக் கிடைக்கிறது.

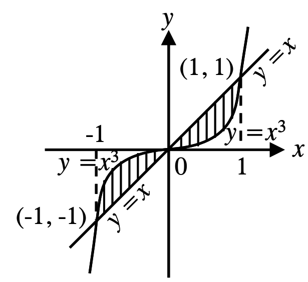
தேவையான பரப்பு $= A_1 + A_2 = \int\limits_{-1}^{0} [g(x) - f(x)] dx + \int\limits_{0}^{1} [f(x) - g(x)] dx$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left(0 - \frac{1}{4}\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) - \left(\frac{1}{4} - 0\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ சதுர அலகுகள்



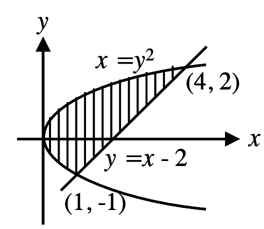
படம் *7.16*

எடுத்துக்காட்டு 7.28:

வளைவரை $y^2 = x$ *மற்றும்* $y = x - 2$ *என்ற கோட்டினால் அடைபடும் பரப்பினைக் காண்க.*

தீர்வு : *பரவளையம்* $y^2 = x$ *மற்றும் நேர்க்கோடு* $y = x - 2$ *வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள்* $(1, -1)$ *மற்றும்* $(4, 2)$

கொடுத்துள்ள பரப்பைக் காண x*-ஐ பொறுத்து தொகையீடு கண்டால் பரப்பை இரண்டு பிரிவுகளாகத்தான் தொகை காண வேண்டும். ஏனெனில்* $x = 1$ *என்ற எல்லைக் கோட்டில் சமன்பாடு மாறுபடுகிறது. ஆனால்* y*ஐ பொறுத்து தொகையீடு கண்டால் பரப்பை பிரிக்கத் தேவையில்லை.*



படம் *7.17*

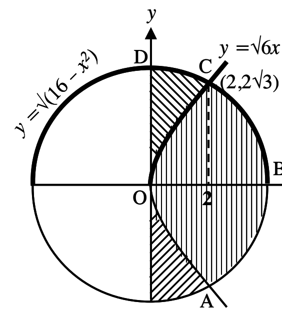
தேவையான பரப்பு $= \int_{-1}^{2} (f(y) - g(y)\, dy$

$$= \int_{-1}^{2} \left[(y + 2) - y^2\right]dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + (4 + 2) - \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{2} + 6 - \frac{9}{3} = \frac{9}{2}$$ சதுர அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 7.29: $x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்திற்கும் $y^2 = 6x$ என்ற பரவளையத்திற்கும் பொதுவான பரப்பைக் காண்க.



படம் *7.18*

தீர்வு : $x^2 + y^2 = 16$ மற்றும் $y^2 = 6x$ வெட்டும் புள்ளிகள் $(2, 2\sqrt{3}), (2, -2\sqrt{3})$ ஆகும்.

தேவையான பரப்பு *OABC* ஆகும்.

சமச்சீர் பண்பின்படி

$$OABC = 2\ OBC$$

i.e., 2{[$y^2 = 6x$ என்ற வளைவரை $x = 0$, $x = 2$ மற்றும் x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு] + [$x^2 + y^2 = 16$ என்ற வளைவரை $x = 2$, $x = 4$ மற்றும் x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு]}

$$= 2\int_0^2 \sqrt{6x}\, dx + 2\int_2^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$$

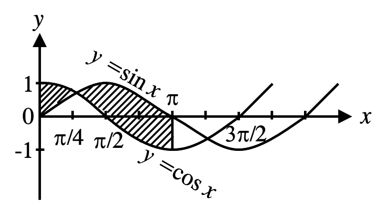
$$= 2\sqrt{6}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 + 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{4^2 - x^2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_2^4$$

$$= \frac{8\sqrt{12}}{3} - 2\sqrt{12} + 8\pi - \frac{8\pi}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\left(4\pi + \sqrt{3}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 7.30:

$y = \sin x$ மற்றும் $y = \cos x$ என்ற வளைவரைகள் $x = 0$ மற்றும் $x = \pi$ என்ற கோடுகள் ஆகியவற்றுக்கு இடையே உள்ள அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.



படம் *7.19*

தீர்வு : வெட்டும் புள்ளிகள் காண வளைவரைகளின் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க வேண்டும்.

$$\sin x = \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin x = \cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

$0 \le x < \frac{\pi}{4}$இல் $\cos x > \sin x$ மற்றும் $\frac{\pi}{4} < x < \pi$இல் $\sin x > \cos x$ என்பதை வரைபடத்தின் மூலம் காணலாம்.

$\therefore$ பரப்பு $A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx$

$= (\sin x + \cos x)_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)_{\pi/4}^{\pi}$

$= \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0) + (-\cos\pi - \sin\pi) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right)$

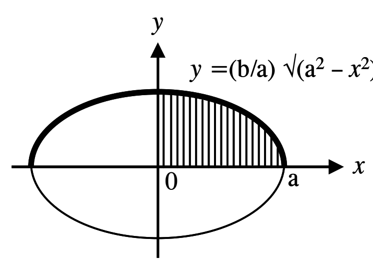
$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 + 1) + (1 - 0) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$ சதுர அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 7.31: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தினால் உருவாகும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : வளைவரையானது இரண்டு அச்சுகளைப் பொறுத்தும் சமச்சீராக உள்ளது.

$\therefore$ நீள்வட்டத்தின் பரப்பு

= 4 × நீள்வட்டத்தின் முதல் கால் பகுதியின் பரப்பு



படம் 7.20

$= 4\int_0^a y dx$

$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

$= \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$

$= \frac{4b}{a}\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1) - 0\right] = \frac{4b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= \pi\, ab$ சதுர அலககள்

குறிப்பு: துணை அலகுச் சமன்பாடு அமைப்பை பயன்படுத்தி இதே பரப்பை அடையலாம்.

i.e., $4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^{\pi/2} b\sin\theta\,(-a\sin\theta)\,d\theta$

எடுத்துக்காட்டு 7.32: $y^2 = (x-5)^2\,(x-6)$ என்ற வளைவரை மேலும் முறையே (i) $x = 5$ மற்றும் $x = 6$ (ii) $x = 6$ மற்றும் $x = 7$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடையேயான பரப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) $y^2 = (x-5)^2\,(x-6)$

$\therefore y = (x-5)\sqrt{x-6}$

வளைவரையானது x-அச்சை $x = 5$ மற்றும் $x = 6$இல் வெட்டுகிறது.

x ஆனது 5க்கும் 6க்கும் இடையில் எந்த ஒரு மதிப்பை பெற்றாலும் y^2இன் மதிப்பு குறையாக உள்ளது.

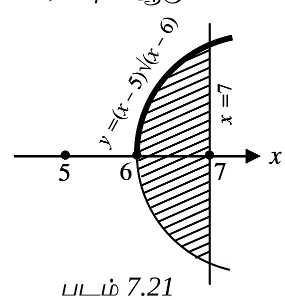
$\therefore$ $5 < x < 6$ என்ற இடைவெளியில் வளைவரை அமையாது.

$\therefore$ $x = 5$ மற்றும் $x = 6$ என்ற இடைவெளியில் பரப்பு 0 ஆகும்.

(ii) தேவையான பரப்பு $= \int_a^b y\,dx$

வளைவரை x-அச்சை பொறுத்து சமச்சீராக இருப்பதால்

பரப்பு $= 2\int_6^7 (x-5)\sqrt{x-6}\,dx$



படம் 7.21

$= 2\int_6^7 (t+1)\sqrt{t}\,dt$

$= 2\int_0^1 (t^{3/2} + t^{1/2})\,dt$

$t = x - 6$ என்க.

$dt = dx$

$t = x - 6$

x	6	7
t	0	1

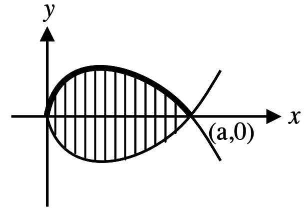
$= 2\left[\dfrac{t^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \dfrac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2\left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{3}\right) = 2\left(\dfrac{6+10}{15}\right) = \dfrac{32}{15}$ சதுர அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 7.33: $3ay^2 = x(x-a)^2$என்ற வளைவரையின் கண்ணியின்(loop) பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$y = 0$ எனில், $x = 0,\ a$ எனக் கிடைக்கிறது. வளைவரையானது x-அச்சை $x = 0$ மற்றும் $x = a$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

$\therefore$ (0, 0) மற்றும் (a, 0) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே ஒரு கண்ணி அமைகிறது.



படம் 7.22

வளைவரை x-அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீராக இருப்பதால் கண்ணியின் பரப்பு ஆனது xஅச்சுக்கு மேல் உள்ள பரப்பின் இரு மடங்காகும்.

$$\therefore \text{தேவையான பரப்பு} = 2\int_0^a y\,dx$$

$$= 2\int_0^a -\frac{\sqrt{x}\,(x-a)}{\sqrt{3a}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{3a}}\int_0^a \left[x^{3/2} - a\sqrt{x}\right]dx$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3a}}\left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2a}{3}x^{3/2}\right]_0^a = \frac{8a^2}{15\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}\,a^2}{45}$$

$$\therefore \text{தேவையான பரப்பு} = \frac{8\sqrt{3}\,a^2}{45} \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.34: $x = a\,(2t - \sin 2t),\ y = a\,(1 - \cos 2t)$ என்ற வட்ட உருள்வளை (cycloid)யின் ஒரு வளைவிற்கும், x-அச்சிற்கும் இடையேயுள்ள அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : வளைவரையானது x-அச்சினை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண $y = 0$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\therefore a(1 - \cos 2t) = 0$$

$$\therefore \cos 2t = 1 \quad ; \quad 2t = 2n\pi,\ n \in z$$

$$\therefore t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$$

$\therefore$ வளைவரையின் ஒரு வளைவானது 0க்கும் πக்கும் இடையில் அமைகிறது.

$$\text{தேவையான பரப்பு} = \int_a^b y\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} a(1 - \cos 2t)\, 2a\,(1 - \cos 2t)\, dt \qquad \begin{array}{|l} y = a(1 - \cos 2t) \\ x = a\,(2t - \sin 2t) \\ dx = 2a(1 - \cos 2t)\, dt \end{array}$$

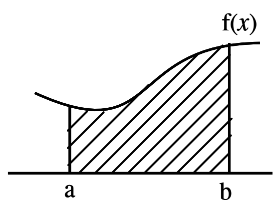
$$= 2a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t)^2 dt = 2a^2 \int_0^{\pi} (2 \sin^2 t)^2 dt = 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 t\, dt$$

$$= 2 \times 8a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t\, dt \qquad \left(\because \int_0^{2a} f(x)\, dx = 2 \int_0^{a} f(2a - x) dx \right)$$

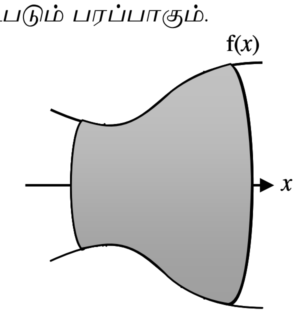
$$= 16a^2 \left[\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right] = 3\pi a^2$$ சதுர அலகுகள்.

7.5.2 சுழற்றுதலில் அடையப்பெறும் திடப்பொருளின் கன அளவு (Volume of solids of revolution) :

f என்பது $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் குறையற்ற மதிப்பை பெறும் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு என்க. R என்பது fஇன் வளைவரையால் மேல் வரம்பிடப்பட்டும் x-அச்சால் கீழ் வரம்பிடப்பட்டும் மற்றும் $x = a$, $x = b$ [படம் 7.23 (a)] ஆகிய கோடுகளால் அடைபடும் பரப்பாகும்.



படம் 7.23(a)



படம் 7.23 (b)

இப்பரப்பை x-அச்சைப் பொறுத்து சுழற்றும் போது வட்ட குறுக்கு வெட்டு வடிவில் அமைந்த திடப்பொருளை உருவாக்கும் (படம் 7.23(b)]. xஇல் வெட்டு முகத்தின் ஆரம் $f(x)$ என்பதால் குறுக்கு வெட்டு முகப்பரப்பு $A(x) = \pi\, [f(x)]^2 = \pi y^2$

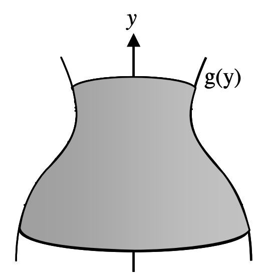
வட்ட வடிவத் தகட்டை x அச்சுக்கு செங்குத்தான திசையில் நகர்த்துவதால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு

$$V = \int_a^b \pi\, [f(x)]^2 dx = \int_a^b \pi\, y^2\, dx$$ ஆகும். [படம் 7.23(b)]

(ii) $x = g(y)$ என்ற வளைவரை, $y = c$, $y = d$ என்ற கோடுகள் மற்றும் y-அச்சு வலப்பக்கம் அடைபடும் பரப்பை y அச்சைப் பொறுத்து சுழற்றும்போது ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு

$$V = \int_c^d \pi\, [g(y)]^2 dx = \int_c^d \pi\, x^2\, dy$$

ஆகும். (படம் 7.24)



படம் 7.24

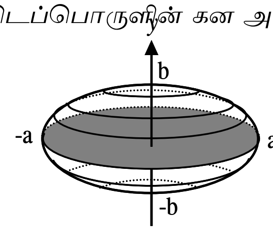
எடுத்துக்காட்டு 7.35:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ என்ற நீள்வட்டம் ஏற்படுத்தும் பரப்பினை குற்றச்சைப் பொறுத்துச் சுழற்றினால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு காண்க.

தீர்வு : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வளைவரையை y-அச்சைப் பொறுத்துச் சுழற்றினால் தேவையான கன அளவு கிடைக்கும்.

yஇன் எல்லைகளைக் காண $x = 0$ எனப் பிரதியிடவும்

$x = 0 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b$



படம் 7.25

கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையிலிருந்து, $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$

$\therefore$ கன அளவு

$$V = \int_c^d \pi\, x^2 dy = \int_{-b}^{b} \pi\, \frac{a^2}{b^2}\, (b^2 - y^2)\, dy = 2\pi\, \frac{a^2}{b^2} \left(b^2 y - \frac{y^3}{3}\right)_0^b$$

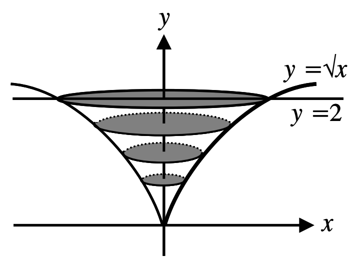
$$= 2\pi\, \frac{a^2}{b^2}\left(b^3 - \frac{b^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}\, a^2 b \text{ கன அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.36:

$y = \sqrt{x}$ என்ற வளைவரையில் $y = 2$, $x = 0$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பினை y-அச்சைப் பொறுத்துச் சுழற்றினால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கனஅளவினைக் காண்க.

தீர்வு : y-அச்சைப் பொறுத்து சுழற்றுவதால், $y = \sqrt{x}$ என்ற சமன்பாட்டை $x = y^2$ என எழுதலாம்.

yஇன் எல்லைகள் $y = 0$ மற்றும் $y = 2$ ($x = 0$ என $x = y^2$இல் பிரதியிடக் கிடைப்பது $y = 0$)



படம் 7.26

கன அளவு $V = \int_c^d \pi\, x^2 dy$

$$= \int_0^2 \pi\, y^4\, dy = \left[\frac{\pi y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32\,\pi}{5} \text{ கன அலகுகள்.}$$

பயிற்சி 7.4

(1) $x - y = 1$ என்ற கோடு மற்றும்

(i) x-அச்சு, $x = 2$, $x = 4$ என்பவற்றால் அடைபடும் பரப்பு

(ii) x-அச்சு, $x = -2$, $x = 0$ என்பவற்றால் அடைபடும் பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(2) $x - 2y - 12 = 0$ என்ற கோடு மற்றும்

(i) y-அச்சு, $y = 2$, $y = 5$ என்பவற்றால் அடைபடும் பரப்பு

(ii) y-அச்சு, $y = -1$, $y = -3$ என்பவற்றால் அடைபடும் பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(3) $y = x - 5$ என்ற கோடு xஅச்சு, $x = 3$ மற்றும் $x = 7$ என்ற கோடுகளால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பினைக் காண்க.

(4) $y = 3x^2 - x$ என்ற வளைவரை x-அச்சு $x = -1$ மற்றும் $x = 1$ என்ற கோடுகளால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பினைக் காண்க.

(5) $x^2 = 36y$ என்ற வளைவரை y-அச்சு, $y = 2$ மற்றும் $y = 4$ ஆகிய கோடுகளால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பினைக் காண்க.

(6) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பினைக் காண்க.

(7) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தில் உள்ள இரண்டு செவ்வகலத்திற்கு இடைப்பட்ட பரப்பினைக் காண்க.

(8) $y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்திற்கும் $2x - y = 4$ என்ற கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பினைக் காண்க.

(9) $4y^2 = 9x$, $3x^2 = 16y$ என்ற பரவளையங்களுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பினைக் காண்க.

(10) a என்ற ஆரமுள்ள வட்டத்தின் பரப்பினைக் காண்க.

பின்வரும் வளைவரைகள் மற்றும் கோடுகளால் சூழப்பட்ட பரப்புச் சுழற்சியினால் ஏற்படுத்தும் திடப்பொருளின் கனஅளவைக் காண்க.

(11) $y = 1 + x^2, x = 1, x = 2, y = 0$, x-அச்சைப் பொறுத்து

(12) $2ay^2 = x(x - a)^2, a > 0$, x-அச்சைப் பொறுத்து

(13) $y = x^3, x = 0, y = 1$, y-அச்சைப் பொறுத்து.

(14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, xஅச்சைப் பொறுத்து $a > b > 0$.

(15) ஆரம் 'r', குத்துரயம் 'h' உடைய கூம்பின் கனஅளவைக் காண்க.

(16) $xy = 1$ என்ற வளைவரைக்கும், x-அச்சு, $x = 1$ என்பவற்றால் அடைபடும் பரப்பு x-அச்சைப் பொறுத்து சுழற்றும்போது ஏற்படும் திடப்பொருளின் கனஅளவைக் காண்க.

7.6. வளைவரையின் நீளம் (Length of the curve) :

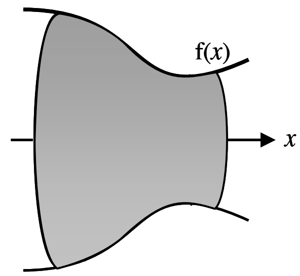
(i) $f(x)$ என்ற சார்பு மற்றும் அதன் வகைக்கெழுச் சார்பு $f\,'(x)$ ஆகியவை $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானதாக இருப்பின் $x = a$ முதல் $x = b$ வரையுள்ள வளைவரையின் வில்லின் நீளம் $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ ஆகும்.

(ii) வளைவரையின் சமன்பாடு $x = g(y)$ வடிவத்திலும் $[c, d]$இல் $g(y)$ தொடர்ச்சியானது எனில், $y = c$ முதல் $y = d$ வரையுள்ள வளைவரையின் வில்லின் நீளம் $L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ ஆகும்.

(iii) $y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் துணையலகு அமைப்பு $x = \phi(t)$, $y = \Psi(t)$ என்க. $\phi(t)$, $\Psi(t)$ என்ற சார்புகள் $\alpha \le t \le \beta$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையதும் மற்றும் $\phi'(t)$ பூச்சியமற்றது எனில் வில்லின் நீளம் $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\Psi'(t))^2}\, dt$ ஆகும்.

7.7 திடப் பொருளின் வளைபரப்பு (Surface area of a solid) :

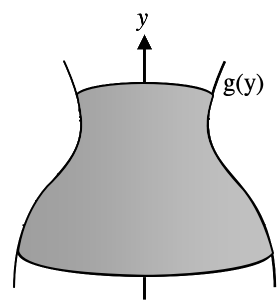
(i) $f(x)$ மற்றும் அதன் வகைக்கெழு $f'(x)$ ஆகியவை $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையது எனில் $y = f(x)$ என்ற வளைவரை, $x = a$, $x = b$ ஆகிய கோடுகள் x-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் பரப்பினை x-அச்சைப் பொறுத்து சுழற்றினால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் வளைபரப்பு



படம் 7.27

$$S.A. = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \text{ ஆகும்.}$$

(ii) வளைவரையின் சமன்பாடு $x = g(y)$ வடிவத்திலும் மற்றும் $[c, d]$இல் $g'(y)$ தொடர்ச்சியுடையதும் எனில் $x = g(y)$ என்ற வளைவரை, $y = c$, $y = d$ என்ற கோடுகள் மற்றும் y-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் பரப்பினை y அச்சைப் பொறுத்து சுழற்றும்போது ஏற்படும் திடப் பொருளின் வளைபரப்பு



படம் 7.28

$$S.A. = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \text{ ஆகும்.}$$

(iii) $y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் துணையலகு அமைப்பு $x = g(t)$, $y = h(t)$ என்க. $g(t)$, $h(t)$ என்ற சார்புகள் $\alpha \le t \le \beta$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையதும் $g'(t)$ பூச்சியமற்றதும் எனில் வளைபரப்பு

$$S.A. = 2\pi \int_{t=\alpha}^{t=\beta} y \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2}\, dt \text{ ஆகும்.}$$

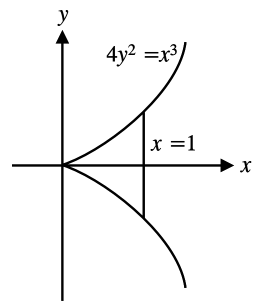
எடுத்துக்காட்டு 7.37:

$4y^2 = x^3$ என்ற வளைவரையில் $x = 0$இலிருந்து $x = 1$ வரையுள்ள வில்லின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$4y^2 = x^3$

*x*ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த



படம் 7.29

$$8y\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{8y}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9x^4}{64y^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{9x^4}{16 \times 4y^2}} = \sqrt{1 + \frac{9x^4}{16x^3}} = \sqrt{1 + \frac{9x}{16}}$$

வளைவரையானது *x*-அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது.

தேவையான வில்லின் நீளம்,

$$L = 2\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\int_0^1 \left(1 + \frac{9x}{16}\right)^{1/2} dx$$

$$= 2 \times \left[\frac{\left(1 + \frac{9x}{16}\right)^{3/2}}{\frac{9}{16} \times \frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{64}{27}\left[\left(1 + \frac{9x}{16}\right)^{3/2}\right]_0^1$$

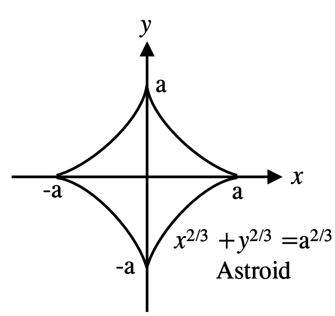
$$= \frac{64}{27}\left[\frac{125}{64} - 1\right] = \frac{61}{27}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.38: $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு : நாற்கூர் சமவளை (Astroid)இன் துணையலகு அமைப்பு $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ ஆகும்.

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t \;;$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$$



படம் 7.30

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} = 3a \sin t \cos t$$

வளைவரையானது அச்சுகளைப் பொறுத்து சமச்சீராக இருப்பதால் வளைவரையின் மொத்த நீளம் முதல் கால் வட்டப் பகுதியில் அமைந்து உள்ள நீளத்தைப் போல் நான்கு மடங்காகும்.

$\therefore$ வளைவரையின் மொத்த நீளம் $= 4 \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$

$$= 4 \int\limits_0^{\pi/2} 3a \sin t \ \cos t \ dt = 6a \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t \, dt$$

$$= 6a \,.\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = -3a\,[\cos \pi - \cos 0]$$

$$= -3a\,[-1 \ -1] = 6a$$

எடுத்துக்காட்டு 7.39: $y = \sin x$ என்ற வளைவரை $x = 0$, $x = \pi$ மற்றும் x-அச்சு ஆகியவற்றால் ஏற்படும் பரப்பினை x-அச்சினைப் பொறுத்து சுழற்றும் போது கிடைக்கும் திடப்பொருளின் வளைபரப்பு $2\pi \left[\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $y = \sin x$

xஐ பொறுத்து வகையிட, $\frac{dy}{dx} = \cos x$.

$$\therefore \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \cos^2 x}$$

x-அச்சைப் பொறுத்து சுழற்றுவதால்,

வளைபரப்பு $= \int\limits_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$

$$S = \int\limits_0^{\pi} 2\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\ dx$$

$\cos x = t$ என்க

$-\sin x \, dx = dt$

$t = \cos x$

x	0	π
t	1	-1

$$= \int_{1}^{-1} 2\pi \sqrt{1 + t^2}\,(- dt) = 4\pi \int_{0}^{1} \sqrt{1 + t^2}\,(dt)$$

$$= 4\pi \left[\frac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2}\log\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] - 0$$

$$= 2\pi \left[\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 7.40: $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 + \cos t)$ என்ற வட்ட உருள் வளை (cycloid) அதன் அடிப்பக்கத்தைப் (x-அச்சு) பொறுத்து சுழற்றுவதால் ஏற்படும் திடப் பொருளின் வளைப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = 0 \Rightarrow 1 + \cos t = 0 \quad \cos t = -1 \quad \Rightarrow \quad t = -\pi, \pi$$

$$x = a\,(t + \sin t)\ ;\ y = a\,(1 + \cos t)$$

$$\frac{dx}{dt} = a\,(1 + \cos t) \quad \frac{dy}{dt} = - a \sin t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2\,(1 + \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = 2a \cos\frac{t}{2}$$

$$\text{வளைபரப்பு} = \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi a\,(1 + \cos t)\, 2a \cos\frac{t}{2}\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\, a\, .\, 2\cos^2\frac{t}{2}\, .\, 2\, a \cos\frac{t}{2}\, dt = 16\pi\, a^2 \int_{0}^{\pi} \cos^3\frac{t}{2}\, dt$$

$$= 16\pi a^2 \int_{0}^{\pi/2} 2\cos^3 x\, dx \quad \left[\frac{t}{2} = x \text{ எனக் கொள்க}\right]$$

$$= 32\pi a^2 I_3$$

$$= 32\pi a^2 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{64}{3}\pi a^2 \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

பயிற்சி 7.5

(1) ஆரம் a உடைய வட்டத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

(2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தினை $t = 0$ முதல் $t = \pi$ வரை கணக்கிடுக.

(3) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் அதன் செவ்வகலம் வரையிலான பரப்பினை x-அச்சின் மீது சுழற்றும்போது கிடைக்கும் திடப் பொருளின் வளைபரப்பைக் காண்க.

(4) ஆரம் r அலகுகள் உள்ள கோளத்தின் மையத்திலிருந்து a மற்றும் b அலகுகள் தொலைவில் அமைந்த இரு இணையான தளங்கள் கோளத்தை வெட்டும்போது இடைப்படும் பகுதியின் வளைபரப்பு $2\pi\, r\, (b - a)$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து கோளத்தின் வளைபரப்பை வருவி.
$(b > a)$.

8. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்
(DIFFERENTIAL EQUATIONS)

8.1 அறிமுகம் :

கணிதத்தில் ஒரு பிரிவாகவும் அறிவியலின் முதன்மை மொழியாக மிகத் தெளிவாக அழைக்கப்படுவதுமான "வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்", அறிவியல், பொறியியல் மற்றும் சமூக அறிவியல் பாடங்களில் மிக முக்கிய பங்கு வகிக்கின்றது. இதனை சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் தெரிந்து கொள்வோம்.

(1) *இரு உயிரினங்கள் உயிர்வாழ்வது ஒரு குறிப்பிட்ட உணவு நிலையினை நாடி இருக்கின்றன என எடுத்துக் கொள்வோம். இது, அவ்வுயிரினங்களுக்குள் அந்த உணவை உட்கொள்வதற்கு போட்டியை ஏற்படுத்துகின்றது. இத்தகைய நிலையை தண்ணீர், உரம் மற்றும் தாதுப் பொருட்களை பொதுவாக உட்கொள்ளும் தாவர இனங்களில் காணலாம். எவ்வாறாக இருப்பினும், இத்தகைய போட்டிகள் இரு உயிரினங்களுக்கு இடையே ஏற்பட்டால், ஒன்றின் வளர்ச்சி இன்னொன்றால் தடைபடுவதைக் காணலாம். மேலும் அத்தடையானது 't' என்னும் அந்நேரத்தில் மற்ற உயிரினத்தின் வளர்ச்சி விகிதத்தைப் பொறுத்து அமைகிறது. இந்நிலையானது கணித மாதிரியாக எழுதப்படுமாயின், அதன் தீர்வானது, அவ்வுயிரினங்களில் ஒன்று அழிந்து போகும் காலத்தை அறிய உதவுகின்றது.*

(2) *பல வியாதிகள் தொற்றுத்தன்மை மூலம் பரவுகின்றன. ஒரு நகரத்தில் சுலபமாக வியாதி தொற்றக்கூடிய மக்களின் தொகை p என்க. ஒரு நபர் தொற்று நோயால் பாதிக்கப்படுகிறார் என வைத்துக் கொள்வோம். தொற்றுதல் மூலம், சலபமாக பாதிப்புக்குள்ளாகும் அடுத்த நபருக்கும் அவ்வியாதி பரவுகிறது. இந்நிலை தொடர்வதால் மொத்த மக்களும் பாதிக்கப்படுகிறார்கள். சில கருத்துகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு இந்நிலையை கணிதமுறைப்படி கணித மாதிரியாக வடிக்கப்பட்டால், அதன் தீர்வானது, அந்நோய் பரவுவதைக் குறித்து நமக்கு பல தகவல்களைத் தரும்.*

(3) *இறந்தவர் ஒருவரின் உடல் மருத்துவப் பரிசோதனைக்காக ஒரு குறித்த நேரம் கொண்டு வரப்படுகிறதெனில், வெவ்வேறு கால இடைவெளியில் எடுக்கப்பட்ட அவ்வுடலின் வெப்ப நிலைகளை கணித ரீதியான வடிவில் எழுதி தீர்ப்பதன் மூலம் அந்நபர் எப்பொழுது இறந்திருப்பார் என்பதைத் துல்லியமாகக் கணக்கிடலாம்.*

(4) ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் சிதைந்து போகும் கதிரியக்கப் பொருளின் அளவையும் கணித ரீதியாக எழுதி தீர்க்கலாம்.

(5) இரு நாடுகளுக்கிடையே வெவ்வேறு பிரச்சனைகளுக்காக யுத்தம் நடப்பதற்கு பல்வேறு எடுத்துக்காட்டுகள் காண்பிக்கலாம். ஒவ்வொரு நாடும் மற்ற நாட்டிலிருந்து தன்னைப் பாதுகாத்துக் கொள்வதற்காக தனது படை பலத்தை பெருக்கிக் கொள்கிறது. இயல்பாக, யுத்த நாடுகளுக்கு இடையே படைபலத்தை பெருக்கிக் கொள்ளும் ஆர்வம் கூடிக்கொண்டே போகிறது. ஒரு சிறு பிரச்சினையே, போர் போன்ற நிலையை உருவாக்கி படையை அதிகரிக்கும் சூழ்நிலையை ஏற்படுத்தி விடுகிறது. பொதுவாக நாம் அனுபவப்பட்டுள்ள இப்பிரச்சினைகளை கணித மொழியில் எழுதி தீர்வு காணப்பட்டுள்ளது. இக்கணித மாதிரிகள் முதல் மற்றும் இரண்டாம் உலகப் போரின் போது போரிட்ட நாடுகளில் நடைமுறைச் சூழலுக்காக சோதிக்கப்பட்டு பயன்படுத்தப்பட்டன.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து ஒவ்வொரு நிலையிலும் அமைக்கும் கணித மாதிரியானது வகைக்கெழுச் சமன்பாடாக மாறுவதைக் காணலாம். இயற்பியல் கோட்பாடுகளை ஆராய்வதற்கு உதவும் வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளின் வாயிலாக அவற்றின் முக்கியத்துவம் நன்கு விளங்கும். இக்கணிதப் பிரிவின் பயன்பாடுகளானது கணிதம் மற்றும் அறிவியலை இணைக்கும் பாலமாகும். எனவே இது அறிவியல்களின் மொழி எனக் கூறப்படுவது மிகவும் சரியாகும்.

ஒருமுறை கலிலியோ, அமைதி நிலையிலிருந்து விழும் ஒரு பொருளின் வேகம் அது விழும் தொலைவுக்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும் என அனுமானித்தார். பின்னர் அது விழும் நேரத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும் என மாற்றிக் கொண்டார், இக்கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றும் ஏதேனும் ஒரு சார்பின் மாறுவீதம் கொண்ட சமன்பாடாக எழுதப்படும். இது கணித வல்லுனர்களால் அழைக்கப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டாகும்.

s தொலைவிலிருந்து விழும் ஒரு பொருளின் வேகம், நேரம் 't'க்கு நேர் விகிதமாக இருக்குமெனில் அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{ds}{dt} = kt$ ஆகும். இது அப்பொருளின் திசைவேகத்தைத் தரும்.

வரையறை : ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சாரா மாறிகள் அதனைச் சார்ந்த மாறி மற்றும் அதன் வகையீடுகள் அடங்கியச் சமன்பாடு, வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

$y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பு எனில், அதன் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$ என்பதை, xஐப் பொறுத்து yஇன் மாறுவீதம் எனக் கொள்ளலாம். இயல்பாக நடக்கும் எந்த ஒரு செயலிலும் உள்ள மாறிகள் மற்றும் அவற்றின் மாறு வீதங்கள் அடிப்படை விஞ்ஞான தத்துவத்தின்படி

ஒன்றோடொன்று தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன. இக்கூற்றை கணித ரீதியாக எழுதும்போது கிடைப்பது வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எனவே வகைக்கெழுச் சமன்பாடு என்பது வகைக்கெழுக்களைக் கொண்ட ஒரு சமன்பாடாகும். ஒவ்வொரு இயல்பான செயலையும் ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டால் நிர்ணயிக்கலாம் என்னும் கூற்றானது இதன் முக்கியத்துவத்தை மேலும் வெளிப்படுத்துகின்றது. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் இரு வகைப்படும்.

(i) சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் மற்றும்

(ii) பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.

நாம் இந்த அத்தியாயத்தில் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பற்றிய கருத்துகளைப் பார்ப்போம்.

வரையறை : ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் வெளிப்படையாகவோ அல்லது மறைமுகமாகவோ ஒரே ஒரு சாரா மாறி மட்டுமே இடம் பெறுமானால் அதனை ஒரு சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு என்போம். எடுத்துக்காட்டாக

(i) $\frac{dy}{dx} = x + 5$ (ii) $(y')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$ (iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ என்பவை

சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும்.

8.2 வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி (Order and degree of a differential equation) :

வரையறை : ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் **வரிசையானது** அதிலுள்ள வகைக்கெழுக்களின் வரிசையில், உச்ச வரிசையாகும். வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் **படி** என்பது அதிலுள்ள வகைக்கெழுக்களின் உச்ச வரிசையின் படியாகும். குறிப்பாக வகைக்கெழுவில் பின்னங்கள் மற்றும் படிமூலங்கள் இருப்பின் அவற்றை நீக்கிய பின் படிகாணுதல் முறையாகும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி காண்பதற்கு அதிலுள்ள $r, s, t \ldots$ போன்ற மாறிகளின் அடுக்குக் குறியிலுள்ள பின்னம் மற்றும் படிமூலங்கள் நீக்கப்பட வேண்டியதில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 8.1: கீழ்க்காணும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி காண்க:

(i) $\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + y = 7$ (ii) $y = 4\frac{dy}{dx} + 3x\frac{dx}{dy}$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}}$ (iv) $(1 + y')^2 = y'^2$

தீர்வு : (i) இச்சமன்பாட்டிலுள்ள உச்ச வரிசை வகைக்கெழுவின் வரிசை 3 ஆகும். அவ்வரிசையின் படி 1 ஆகும்.

$\therefore$ (வரிசை, படி) = (3, 1)

(ii) $$y = 4\frac{dy}{dx} + 3x\frac{dx}{dy} \Rightarrow y = 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3x\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில் $\frac{dy}{dx}$ ஐ பின்ன அமைப்பிலிருந்து நீக்கியபின்

கிடைப்பது $$y\frac{dy}{dx} = 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3x$$

உச்ச வரிசை = 1

உச்ச வரிசையின் படி = 2

(வரிசை, படி) = (1, 2)

(iii) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}}$$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில், படி மூலத்தினை நீக்க, இருபுறமும் 4இன் அடுக்குக்கு உயர்த்துவோம். இதனால் கிடைப்பது, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 = \left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$.

எனவே (வரிசை, படி) = (2, 4).

(iv) $(1 + y')^2 = y'^2 \Rightarrow 1 + y'^2 + 2y' = y'^2$லிருந்து கிடைப்பது

$$2\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$\therefore$ (வரிசை, படி) = (1, 1).

8.3. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல் (Formation of differential equations) :

$f(x, y, c_1) = 0$ என்பது x, y மற்றும் c_1 என்ற மாறத்தக்க மாறிலியைக் (arbitrary constant) கொண்ட ஒரு சமன்பாடு எனக் கொள்வோம். இங்கு $f(x, y, c_1) = 0$வை ஒரு சாரா மாறியைப் பொறுத்து ஒருமுறை வகைப்படுத்தி c_1ஐ நீக்குவதால் x, y மற்றும் $\frac{dy}{dx}$களை உள்ளடக்கிய ஒரு தொடர்பு கிடைக்கின்றது. இது ஒரு முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடு என்பது வெளிப்படையாகும். அதைப் போலவே, c_1 மற்றும் c_2 என்னும் இரு மாறத்தக்க மாறிலிகளைக் கொண்ட $f(x, y, c_1, c_2) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை இருமுறை வகைப்படுத்துவதால், மூன்று சமன்பாடுகள் (fஐ உள்ளடக்கி) கிடைக்கப்பெறும். இங்கு c_1 மற்றும் c_2வை இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து நீக்கிய பின், இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒன்றினைப் பெறுகிறோம்.

பொதுவாக $c_1, c_2 \ldots c_n$ என்கின்ற n மாறத்தக்க மாறிலிகளைக் கொண்ட $f(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை, n தடவை வகைப்படுத்துவதால் மொத்தமாக $(n + 1)$ சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம். இதில் $c_1, c_2, \ldots c_n$ என்பனவற்றை நீக்குவதால் n வரிசையுடைய ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம்.

குறிப்பு **:** மாறத்தக்க மாறிலிகளுக்குள் தொடர்புகள் இருப்பின், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை nஐ விடக் குறைவாக இருப்பதற்கு வாய்ப்பு உண்டு.

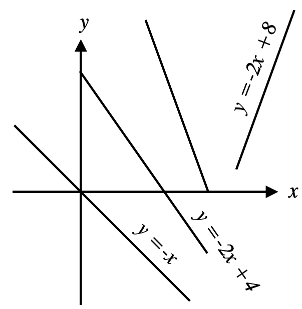
விளக்க எடுத்துக்காட்டு **:** $y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடுகளுக்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு m மற்றும் c என்பவை ஏதேனுமிரு மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

இங்கு m மற்றும் c இரு மாறத்தக்க மாறலிகள் ஆதலால், இருமுறை வகைப்படுத்த,

$$\frac{dy}{dx} = m$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

இவ்வாறாக இரு மாறத்தக்க மாறிலிகளும் நீக்கப்பட்டு விட்டதால், தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும்.



படம் 8.1

குறிப்பு **:** மேலே குறிப்பிட்டுள்ள விளக்க எடுத்துக்காட்டில், m மற்றும் c என்னும் இரு மாறத்தக்க மாறிலிகளை எடுத்துக் கொண்டுள்ளோம். இங்கு இரு நிலைகள் எழுவதைக் காணலாம்.

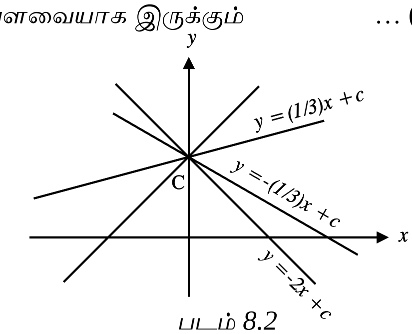
***நிலை* (i) :** m ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி. c ஒரு சாதாரண நிலையான மாறிலி.

$y = mx + c$இல் m மட்டுமே மாறும் அளவையாக இருக்கும் … (1)

ஒருமுறை வகைப்படுத்த கிடைப்பது $\frac{dy}{dx} = m$ … (2)

(1) மற்றும் (2)இலிருந்து mஐ நீக்குவதால் கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

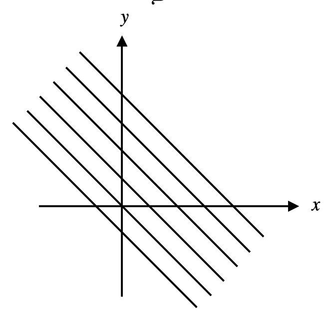
$$x\left(\frac{dy}{dx}\right) - y + c = 0$$ ஆகும்.



படம் 8.2

நிலை (ii) : *c* ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி. *m* ஒரு நிலையான மாறிலி.

இங்கு *c* மட்டுமே ஒரு மாறும் அளவையாக இருப்பதால், ஒருமுறை வகைப்படுத்த கிடைப்பது $\frac{dy}{dx} = m$. இந்த சமன்பாட்டில் *c* நீக்கப்பட்டிருப்பதால் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = m$ ஆகும்.



படம் 8.3

எடுத்துக்காட்டு 8.2: பின்வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைக்க :

(i) $y = e^{2x} (A + Bx)$ (ii) $y = e^{x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$

(iii) $Ax^2 + By^2 = 1$ (iv) $y^2 = 4a(x - a)$

தீர்வு :

(i) $y = e^{2x} (A + Bx)$

$ye^{-2x} = A + Bx$ … (1)

மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் இரு மாறத்தக்க மாறலிகள் இருப்பதால், இருமுறை வகைப்படுத்தக் கிடைப்பது $y'e^{-2x} - 2y\, e^{-2x} = B$

$\{y''e^{-2x} - 2y'\, e^{-2x}\} - 2\{y'e^{-2x} - 2y\, e^{-2x}\} = 0$

$e^{-2x} \{y'' - 4y' + 4y\} = 0$ $[\because e^{-2x} \neq 0]$

$y'' - 4y' + 4y = 0$ என்பது தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(ii) $y = e^{x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$

$ye^{-x} = A \cos 3x + B \sin 3x$

இங்கு இரு மாறத்தக்க மாறிலிகளை நீக்குவதற்கு இருமுறை வகைப்படுத்த வேண்டும்.

$$y'e^{-x} - ye^{-x} = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$$

$$y''\, e^{-x} - y'e^{-x} - y'e^{-x} + ye^{-x} = -9 (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

(அ.து.), $e^{-x} (y'' - 2y' + y) = -9ye^{-x}$

$$\Rightarrow y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (\because e^{-x} \neq 0)$$

(iii) $Ax^2 + By^2 = 1$ … (1)

வகைப்படுத்த, $2Ax + 2Byy' = 0$ (அ.து.), $Ax + Byy' = 0$ … (2)

மறுபடியும் வகைப்படுத்த, $A + B(yy'' + y'^2) = 0$ … (3)

(1), (2) மற்றும் (3)இலிருந்து A மற்றும் Bயை நீக்கக் கிடைப்பது

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & -1 \\ x & yy' & 0 \\ 1 & yy'' + y'^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (yy'' + y'^2)\,x - yy' = 0$$

(iv) $y^2 = 4a(x - a)$ … (1)

வகைப்படுத்த, $2yy' = 4a$ … (2)

(1) மற்றும் (2)இலிருந்து a-வை நீக்குவதால் கிடைப்பது

$$y^2 = 2yy'\left(x - \frac{yy'}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (yy')^2 - 2xyy' + y^2 = 0$$

பயிற்சி 8.1

(1) கீழ்க்காணும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை மற்றும் படி காண்க.

(i) $\frac{dy}{dx} + y = x^2$ (ii) $y' + y^2 = x$

(iii) $y'' + 3y'^2 + y^3 = 0$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2} + x = \sqrt{y + \frac{dy}{dx}}$

(v) $\frac{d^2y}{dx^2} - y + \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{3}{2}} = 0$ (vi) $y'' = (y - y'^3)^{\frac{2}{3}}$

(vii) $y' + (y'')^2 = (x + y'')^2$ (viii) $y' + (y'')^2 = x(x + y'')^2$

(ix) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = \frac{dx}{dy} + x^2$ (x) $\sin x\,(dx + dy) = \cos x\,(dx - dy)$

(2) பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்கு, அடைப்புக்குள் கொடுக்கப்பட்டு இருக்கும் மாறத்தக்க மாறிலிகளை நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைக்க.

(i) $y^2 = 4ax$ $\{a\}$

(ii) $y = ax^2 + bx + c$ $\{a, b\}$

(iii) $xy = c^2$ $\{c\}$

(iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\{a, b\}$

(v) $y = Ae^{2x} + Be^{-5x}$ $\{A, B\}$

(vi) $y = (A + Bx)e^{3x}$ $\{A, B\}$

(vii) $y = e^{3x}\{C\cos 2x + D\sin 2x)$ $\{C, D\}$

(viii) $y = e^{mx}$ $\{m\}$

(ix) $y = Ae^{2x}\cos(3x + B)$ $\{A, B\}$

(3) $y = mx + \dfrac{a}{m}$ என்னும் நேர்கோட்டுத் தொகுப்பில் (i) m ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி; (ii) a ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி; (iii) a, m இரண்டுமே மாறத்தக்க மாறிலிகள் எனில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைக்க.

(4) x-அச்சின் மீது மையம் மற்றும் ஓரலகு ஆரம் கொண்ட வட்டத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

8.4 முதல் வரிசை, முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Differential equations of first order and first degree) :

இப்பகுதியில், நாம் காணப்போகும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றின் வரிசையும் படியும் ஒன்றாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $yy' + x = 0$ (ii) $y' + xy = \sin x$ (iii) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$ (iv) $x\,dy + y\,dx = 0$

முதல் வரிசை மற்றும் முதல் படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் :

இங்கு நாம் முதல் வரிசை முதல் படி கொண்ட சில சிறப்பான வகையைச் சார்ந்த சமன்பாடுகளைக் காண்போம். அவை (i) மாறிகள் பிரிக்கக் கூடியன (ii) சமப்படித்தானவை மற்றும் (iii) நேரியச் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

8.4.1 மாறிகள் பிரிக்கக் கூடியன (Variable separable) :

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் மாறிகள் கீழ்க்காணும் வகையில் மாற்றி அமைக்கப்பட வேண்டும்.

$f_1(x)\, g_2(y)\, dx + f_2(x)\, g_1(y)\, dy = 0$

(அ.து.) சமன்பாட்டினை

$$f_2(x)g_1(y)dy = -f_1(x)\, g_2(y)\, dx \text{ என எழுதலாம்.}$$

$$\Rightarrow \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, dy = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx$$

ஆகையால், இதன் தீர்வு $\displaystyle\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, dy = -\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + c$

எடுத்துக்காட்டு 8.3: தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டினை

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x) + y(1 + x) \text{ என எழுதலாம்.}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1 + x)(1 + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1 + y} = (1 + x)dx$$

தொகையிடக் கிடைப்பது,

$\log (1 + y) = x + \frac{x^2}{2} + c$, இதுவே தேவையான தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.4: *தீர்க்க :* $3e^x \tan y \, dx + (1 + e^x) \sec^2 y \, dy = 0$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டினை

$$\frac{3e^x}{1 + e^x} dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = 0 \text{ என எழுதலாம்.}$$

தொகையிடக் கிடைப்பது

$$3 \log (1 + e^x) + \log \tan y = \log c$$

$$\Rightarrow \log [\tan y \, (1 + e^x)^3] = \log c$$

$$\Rightarrow (1 + e^x)^3 \tan y = c, \text{ இதுவே தேவையான தீர்வாகும்.}$$

குறிப்பு: மாறிலியை $c, \frac{1}{c}, \log c, e^c$ ... என கணக்கின் தேவைக்கேற்ப எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.5: *தீர்க்க :* $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1 - y^2}{1 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை கீழ்க்காணும் முறையில் எழுதலாம்.

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1 - y^2}{1 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

தொகையிட, $\sin^{-1} y + \sin^{-1} x = c$

$\Rightarrow \sin^{-1} \left[x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right] = c$

$\Rightarrow x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = C$ என்பது தேவையான தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.6: *தீர்க்க* : $e^x \sqrt{1 - y^2} \, dx + \frac{y}{x} dy = 0$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டச் சமன்பாட்டை

$$xe^x dx = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \text{ என எழுதலாம்.}$$

தொகையிடக் கிடைப்பது

$$\int xe^x\, dx = -\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

$$\Rightarrow\ xe^x - \int e^x\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

இங்கு $t = 1 - y^2$ என்பதால் $-2y\, dy = dt$

$$\Rightarrow\ xe^x - e^x = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right) + c$$

$$\Rightarrow xe^x - e^x = \sqrt{t} + c$$

$\Rightarrow xe^x - e^x - \sqrt{1-y^2} = c$ என்பது தேவையான தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.7: தீர்க்க : $(x + y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2$

தீர்வு : $x + y = z$ என்க. xஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த,

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \quad (\text{அ.து.}),\ \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

கொடுக்கப்பட்டச் சமன்பாடு $z^2\left(\dfrac{dz}{dx} - 1\right) = a^2$ என மாறுகிறது.

$$\Rightarrow\ \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{a^2}{z^2} \Rightarrow \frac{z^2}{z^2 + a^2}\, dz = dx$$

தொகையிடக் கிடைப்பது, $\displaystyle\int \frac{z^2}{z^2 + a^2}\, dz = \int dx$

$$\int \frac{z^2 + a^2 - a^2}{z^2 + a^2}\, dz = x + c \Rightarrow \int\left(1 - \frac{a^2}{z^2 + a^2}\right) dz = x + c$$

$$\Rightarrow\ z - a^2 \,.\, \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{z}{a} = x + c$$

$$\Rightarrow\ x + y - a \tan^{-1}\left(\frac{x + y}{a}\right) = x + c \qquad (\because z = x + y)$$

(அ.து.), $y - a \tan^{-1}\left(\dfrac{x + y}{a}\right) = c$, என்பது தேவையான தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.8: தீர்க்க : $x\,dy = (y + 4x^5 e^{x^4})dx$

தீர்வு :

$$xdy - y\,dx = 4x^5 e^{x^4} dx$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 4x^3 e^{x^4} dx$$

தொகையிடக் கிடைப்பது $\displaystyle\int \frac{xdy - ydx}{x^2} = \int 4x^3 e^{x^4} dx$

$$\Rightarrow \int d\left(\frac{y}{x}\right) = \int e^t\,dt \qquad \text{இங்கு } t = x^4$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = e^t + c$$

(அ.து.), $\dfrac{y}{x} = e^{x^4} + c$ என்பது தேவையான தீர்வு.

எடுத்துக்காட்டு 8.9: தீர்வின் போது கிடைக்கும் வளைவரையானது ஆதிவழியாகச் செல்கிறது எனில்
$(x^2 - y)dx + (y^2 - x)\,dy = 0$ஐ தீர்க்க.

தீர்வு :

$$(x^2 - y)dx + (y^2 - x)\,dy = 0$$

$$x^2dx + y^2dy = xdy + ydx$$

$$x^2dx + y^2\,dy = d(xy)$$

தொகையிடக் கிடைப்பது $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^3}{3} = xy + c$

இது ஆதிவழியாகச் செல்வதால் $c = 0$

$\therefore$ தேவையான தீர்வு $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^3}{3} = xy$ அல்லது $x^3 + y^3 = 3xy$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.10 : ஒரு முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை $x = -1$ எனும் போது பெரும மதிப்பு 4 ஆகவும் $x = 1$ எனும் போது சிறும மதிப்பு 0 ஆகவும் இருப்பின் அக்கோவையைக் காண்க.

தீர்வு : xஇல் முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையை $y = f(x)$ என்க.

$x = -1$இல் பெரும மதிப்பையும் $x=1$இல் சிறும மதிப்பையும் பெறுவதால்,

$x = -1$, $x = 1$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு $\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = k\,(x + 1)\,(x - 1) = k(x^2 - 1)$$

மாறிகளைப் பிரிப்பதால் கிடைப்பது, $dy = k(x^2 - 1)\,dx$

$$\int dy = k\int (x^2 - 1)\, dx + c$$

$$y = k\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + c \qquad \ldots (1)$$

$x = -1$ எனில் $y = 4$ மற்றும் $x = 1$ எனில் $y = 0$

இவைகளைச் சமன்பாடு (1)இல் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$$2k + 3c = 12$$

$$-2k + 3c = 0$$

இவற்றைத் தீர்வுகாண்பதன் மூலம் $k = 3$ மற்றும் $c = 2$ என அடைகிறோம். இம்மதிப்புகளை (1)இல் பிரதியிட நமக்குத் தேவையான முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை, $y = x^3 - 3x + 2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.11 : ஒரு வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (x, y)இல் வரையும் செங்கோடு $(2, 0)$ என்ற புள்ளி வழியேச் செல்கிறது. வளைவரை $(2, 3)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லுமாயின், வகைக்கெழு சமன்பாட்டு வடிவில் மாற்றி, வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

***தீர்வு* :** $P(x, y)$ என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வளைவரைக்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் சாய்வு $= -\dfrac{dx}{dy}$ மேலும் (x, y) என்ற புள்ளியில் புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோடு $(2,0)$ வழியாகச் செல்வதால், செங்கோட்டின் சாய்வு $= \dfrac{y-0}{x-2}$

$$\therefore -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x-2} \Rightarrow ydy = (2-x)dx$$

இருபுறமும் தொகையிட, $\dfrac{y^2}{2} = 2x - \dfrac{x^2}{2} + c \qquad \ldots (1)$

வளைவரை $(2, 3)$ என்ற புள்ளி வழியேச் செல்வதால்

$\dfrac{9}{2} = 4 - \dfrac{4}{2} + c \Rightarrow c = \dfrac{5}{2}$ இதனை (1)இல் பிரதியிடுக.

$$\frac{y^2}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow y^2 = 4x - x^2 + 5$$

பயிற்சி 8.2

பின்வருவனவற்றைத் தீர்க்க :

(1) $\sec 2x\, dy - \sin 5x \sec^2 y dx = 0$ (2) $\cos^2 x dy + y e^{\tan x} dx = 0$

(3) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$ (4) $yx^2 dx + e^{-x} dy = 0$

(5) $(x^2 + 5x + 7)\, dy + \sqrt{9 + 8y - y^2}\, dx = 0$ (6) $\dfrac{dy}{dx} = \sin(x + y)$

(7) $(x + y)^2 \dfrac{dy}{dx} = 1$

(8) தீர்வின் வளைவரையானது y-அச்சினை வெட்டிக் கொள்ளுமானால் $ydx + xdy = e^{-xy}\,dx$ஐ தீர்க்க.

8.4.2 சமப்படித்தான சமன்பாடுகள் (Homogeneous equations) :

வரையறை :

முதல் வரிசை முதல் படி கொண்ட ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ அல்லது $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$ என எழுத முடியுமானால் அது சமப்படித்தான சமன்பாடு எனப்படும்.

சமப்படித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வு காணச் செயல் விதி :

வரையறையின்படி கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ என எழுதலாம்.} \quad \dots (1)$$

(1)ஐ தீர்க்க, $y = \text{v}x$ என்க. … (2)

(2)ஐ xயைப் பொறுத்து வகைப்படுத்த,

$$\frac{dy}{dx} = \text{v} + x\frac{d\text{v}}{dx} \quad \dots (3)$$

(2) மற்றும் (3)-ஐ (1)இல் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$\text{v} + x\frac{d\text{v}}{dx} = f(\text{v}) \quad \text{or} \quad x\frac{d\text{v}}{dx} = f(\text{v}) - \text{v}$$

x மற்றும் v மாறிகளைப் பிரிக்கக் கிடைப்பது

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\text{v}}{f(\text{v}) - \text{v}} \Rightarrow \log x + c = \int \frac{d\text{v}}{f(\text{v}) - \text{v}}$$

இங்கு c என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலி. தொகையிட்ட பின்னர் vஐ $\frac{y}{x}$ ஆல் பிரதியிடுக.

எடுத்துக்காட்டு 8.12: தீர்க்க : $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$

தீர்வு : $y = vx$ என்க.

$$\text{L.H.S.} = \text{v} + x\frac{d\text{v}}{dx} \;;\; \text{R.H.S.} = v + \tan v$$

$$\therefore\; \text{v} + x\frac{d\text{v}}{dx} = \text{v} + \tan\text{v} \quad \text{or} \quad \frac{dx}{x} = \frac{\cos\text{v}}{\sin\text{v}}\,dv$$

தொகையிடக் கிடைப்பது, $\log x = \log\sin\text{v} + \log c \Rightarrow x = c\sin\text{v}$

(அ.து.), $x = c \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

எடுத்துக்காட்டு 8.13: தீர்க்க : $\left(2\sqrt{xy} - x\right) dy + ydx = 0$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x}$ ஆகும்.

$y = vx$ என்க.

$$\text{L.H.S.} = v + x\frac{dv}{dx} \; ; \text{R.H.S.} = \frac{-v}{2\sqrt{v} - 1} = \frac{v}{1 - 2\sqrt{v}}$$

$$\therefore\; v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1 - 2\sqrt{v}}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{2v\sqrt{v}}{1 - 2\sqrt{v}} \Rightarrow \left(\frac{1 - 2\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}\right) dv = 2\frac{dx}{x}$$

(அ.து.), $\left(v^{-3/2} - 2.\frac{1}{v}\right) dv = 2\frac{dx}{x}$

தொகையிட, $-2v^{-1/2} - 2\log v = 2\log x + 2\log c$

$$-v^{-1/2} = \log(v\,x\,c)$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}} = \log(cy) \;\Rightarrow\; cy = e^{-\sqrt{x/y}} \text{ (அ) } ye^{\sqrt{x/y}} = c$$

குறிப்பு : **இக்கணக்கினை $x = vy$ என எடுப்பதன் மூலம் எளிமையாக தீர்வு காணலாம்.**

எடுத்துக்காட்டு 8.14:

தீர்க்க : $(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0$

தீர்வு :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 + 3xy^2}{y^3 + 3x^2y}$$

$y = vx$ என்க.

$$\text{L.H.S.} = v + x\frac{dv}{dx} \; ; \; \text{R.H.S.} = -\frac{x^3 + 3xy^2}{y^3 + 3x^2y} = -\left(\frac{1 + 3v^2}{v^3 + 3v}\right)$$

$$\therefore\; v + x\frac{dv}{dx} = -\left(\frac{1 + 3v^2}{v^3 + 3v}\right)$$

$$\Rightarrow\; x\frac{dv}{dx} = -\frac{v^4 + 6v^2 + 1}{v^3 + 3v}$$

$$\Rightarrow\; \frac{4dx}{x} = -\frac{4v^3 + 12v}{v^4 + 6v^2 + 1}dv$$

தொகையிடக் கிடைப்பது,

$$4 \log x = -\log (v^4 + 6v^2 + 1) + \log c$$

$$\log[x^4(v^4 + 6v^2 + 1)] = \log c$$

(அ.து.), $x^4 (v^4 + 6v^2 + 1) = c$ அல்லது

$$y^4 + 6x^2y^2 + x^4 = c$$

குறிப்பு : $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{f_1(x/y)}{f_2(x/y)}$ மாதிரியான கணக்குகளின் தீர்வை காண்பது சில நேரங்களில் மிக எளிதாகிறது. கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டு இந்நிலையை விளக்குகிறது. மேற்குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டினை மாறிகளை பிரிக்கும் முறையிலும் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.15:

$x = 0$ ஆக இருக்கும் போது $y = 1$ என இருக்குமானால்

$(1 + e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - x/y)\, dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

தீர்வு : தரப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(x/y - 1)e^{x/y}}{1 + e^{x/y}}$$ என எழுதலாம்.

$x = vy$ என்க.

$$\text{L.H.S.} = v + y\frac{dv}{dy} \;;\; \text{R.H.S.} = \frac{(v-1)e^v}{1 + e^v}$$

$$\therefore\; v + y\frac{dv}{dy} = \frac{(v-1)e^v}{1 + e^v}$$

அல்லது $$y\frac{dv}{dy} = -\frac{(e^v + v)}{1 + e^v}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{y} = -\frac{(e^v + 1)}{e^v + v}\, dv$$

தொகையிடக் கிடைப்பது , $\log y = -\log (e^v + v) + \log c$

அல்லது $y(e^v + v) = c \;\Rightarrow ye^{x/y} + x = c$

இங்கு $x = 0$ எனில் $y = 1 \Rightarrow 1e^0 + 0 = c \Rightarrow c = 1$

$\therefore\; ye^{x/y} + x = 1$

எடுத்துக்காட்டு 8.16: தீர்க்க : $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$y = \nu x$ என்க.

$$\text{L.H.S.} = \nu + x\frac{d\nu}{dx} \ ; \ \text{R.H.S.} = \frac{\nu + \sqrt{1 + \nu^2}}{1}$$

$$\therefore \ \nu + x\frac{d\nu}{dx} = \nu + \sqrt{1 + \nu^2} \text{ அல்லது } \frac{dx}{x} = \frac{d\nu}{\sqrt{1 + \nu^2}}$$

தொகையிடக் கிடைப்பது $\log x + \log c = \log\left[\nu + \sqrt{\nu^2 + 1}\right]$

(அ.து.), $xc = \nu + \sqrt{\nu^2 + 1} \Rightarrow x^2c = y + \sqrt{(y^2 + x^2)}$

பயிற்சி 8.3

பின்வருவனவற்றைத் தீர்க்க :

(1) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-2y)}{x(x-3y)}$ (3) $(x^2 + y^2)\,dy = xy\,dx$

(4) $x^2\frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy$, $x = 1$ எனில் $y = 1$,

(5) $(x^2 + y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0$

(6) (x, y) என்ற புள்ளியில் சாய்வு $1 + \frac{y}{x}$ எனக் கொண்டு, $(1, 0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லக்கூடிய வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8.4.3 நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(Linear Differential Equation) :

வரையறை :

ஒரு முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் $\frac{dy}{dx}$ மற்றும் y ஆகிய உறுப்புகளின் அடுக்குகள் ஒன்று எனில் அச்சமன்பாடு yஇல் ஒரு நேரியச் சமன்பாடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{dy}{dx} + xy = e^x$ என்ற சமன்பாடு yஇல் நேரியச் சமன்பாடாகும். ஏனெனில் $\frac{dy}{dx}$ மற்றும் yஇன் அடுக்குகள் ஒன்றாகும். $y\frac{dy}{dx}$ அல்லது y^2 போன்ற உறுப்புகளின்படி இரண்டாக இருப்பதால் அவை நேரியச் சமன்பாட்டை அமைக்க முடியாது.

முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடு மேற்கூறிய நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் நிலையில் அதனை $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என எழுதலாம்.

இங்கு P மற்றும் Q ஆகியவை xஇன் சார்புகள் மட்டுமே. அதேப் போன்று முதல் வரிசை கொண்டு xஇல் நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வடிவம் $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ ஆகும். இங்கு P மற்றும் Q ஆகியவை yஇன் சார்புகள் மட்டுமே.

yஇல் நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு பின்வருமாறு :

$y\, e^{\int P dx} = \int Q\, e^{\int P dx}\, dx + c$

இங்கு $e^{\int P dx}$ தொகையீட்டுக் காரணி (integrating factor). மேலும் இதனை தொ.கா. (I.F.) எனச் சுருக்கமாக குறிப்பர்.

அதேப் போன்று சமன்பாடு, xஇல் நேரியதாக இருப்பின் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு

$x\, e^{\int P dy} = \int Q\, e^{\int P dy}\, dy + c$ ஆகும்.

இங்கு P மற்றும் Q ஆகியவை yஇன் சார்புகள் மட்டுமே.

இங்கு நாம் கீழ்க்காணும் மடக்கை மற்றும் அடுக்குச் சார்புகளின் பண்புகளை அடிக்கடி பயன்படுத்துவோம்.

(i) $e^{\log A} = A$ (ii) $e^{m \log A} = A^m$ (iii) $e^{-m \log A} = \frac{1}{A^m}$

எடுத்துக்காட்டு 8.17 : தீர்க்க : $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2 \cos x$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவிலுள்ளது. இது yஇல் நேரியச் சமன்பாடாகும்.

இங்கு $P = \cot x$ மற்றும் $Q = 2 \cos x$

I.F. $= e^{\int P dx} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$

∴ தேவையான தீர்வு

$$y\ (\text{I.F.}) = \int Q\, (\text{I.F.})\, dx + c \Rightarrow y(\sin x) = \int 2 \cos x \sin x\, dx + c$$

$$\Rightarrow y \sin x = \int \sin 2x\, dx + c$$

$$\Rightarrow y \sin x = -\frac{\cos 2x}{2} + c$$

$$\Rightarrow 2y \sin x + \cos 2x = c$$

எடுத்துக்காட்டு 8.18 : தீர்க்க : $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{(1 - x^2)}$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right) y = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ஆகும்.

இது yஇல் நேரியச் சமன்பாடு.

$$\text{எனவே இங்கு } \int P dx = \int \frac{2x}{1-x^2} dx = -\log(1-x^2)$$

$$\text{I.F.} = e^{\int P dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

தேவையான தீர்வு

$$y \cdot \frac{1}{1-x^2} = \int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} \times \frac{1}{1-x^2} dx. \quad 1-x^2 = t \text{ என்க } \Rightarrow -2x dx = dt$$

$$\therefore \frac{y}{1-x^2} = \frac{-1}{2} \int t^{-3/2} dt + c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-x^2} = t^{-1/2} + c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 8.19 : தீர்க்க : $(1 + y^2)dx = (\tan^{-1}y - x)dy$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$ என எழுதலாம்.

இது xஇல் நேரியச் சமன்பாடு. எனவே

$$\int P dy = \int \frac{1}{1+y^2} dy = \tan^{-1}y$$

$$\text{I.F.} = e^{\int P dy} = e^{\tan^{-1}y}$$

தேவையான தீர்வு

$$x e^{\tan^{-1}y} = \int e^{\tan^{-1}y} \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) dy + c \qquad \left\{\begin{array}{l} \tan^{-1}y = t \text{ என்க} \\ \therefore \frac{dy}{1+y^2} = dt \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x e^{\tan^{-1}y} = \int e^t \cdot t \, dt + c$$

$$\Rightarrow x e^{\tan^{-1}y} = te^t - e^t + c$$

$$\Rightarrow x e^{\tan^{-1}y} = e^{\tan^{-1}y} (\tan^{-1}y - 1) + c$$

எடுத்துக்காட்டு 8.20 : தீர்க்க : $(x + 1)\frac{dy}{dx} - y = e^x(x + 1)^2$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = e^x(x + 1)$ என எழுதலாம்.

இது yஇல் நேரியதாக உள்ளது.

எனவே $\int Pdx = -\int \frac{1}{x+1}\,dx = -\log(x + 1)$

$$\text{I.F.} = e^{\int Pdx} = e^{-\log(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

∴ தேவையான தீர்வு $y \cdot \frac{1}{x+1} = \int e^x (x + 1)\frac{1}{x+1}\,dx + c$

$$= \int e^x\,dx + c$$

(அ.து.), $\frac{y}{x+1} = e^x + c$

எடுத்துக்காட்டு 8.21 : தீர்க்க : $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$

தீர்வு : இது yஇல் நேரியதாக உள்ளது.

இங்கு $\int Pdx = \int 2\tan x\,dx = 2\log\sec x$

$$\text{I.F.} = e^{\int Pdx} = e^{\log\sec^2 x} = \sec^2 x$$

தேவையான தீர்வு

$$y\sec^2 x = \int \sec^2 x \cdot \sin x\,dx$$
$$= \int \tan x\ \sec x\ dx$$

$\Rightarrow y\sec^2 x = \sec x + c$ அல்லது $y = \cos x + c\cos^2 x$

பயிற்சி 8.4

பின்வருவனவற்றைத் தீர்க்க :

(1) $\frac{dy}{dx} + y = x$

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2+1}\,y = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

(3) $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$

(4) $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$

(5) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin(x^2)$

(6) $\frac{dy}{dx} + xy = x$

(7) $dx + xdy = e^{-y}\sec^2 y\,dy$

(8) $(y - x)\frac{dy}{dx} = a^2$

(9) எந்தவொரு புள்ளியிலும் சாய்வு $y+2x$ எனக் கொண்டு ஆதிவழியாகச் செல்லும் வளைவரையின் சமன்பாடு $y = 2(e^x - x - 1)$ எனக் காட்டுக.

8.5 மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(Second order linear differential equations with constant coefficients) :

மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை அசமப்படித்தான நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்

$a_0y'' + a_1y' + a_2y = X$ … (1),

இங்கு a_0, a_1, a_2 மாறிலிகள் $a_0 \neq 0$ மற்றும் X ஆனது xஇன் சார்பாகும்.

$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0, \ a_0 \neq 0$ … (2)

என்ற சமன்பாடு மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட சமப்படித்தான இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

(1)ஐ தீர்க்க (2)இன் தீர்வை முதலில் காண வேண்டும். இதைத் தீர்ப்பதற்கு பின்வருமாறு செய்க :

$y = e^{px}$, (p ஒரு மாறிலி) என்னும் சார்பை எடுத்துக் கொள்க.

இங்கு $y' = pe^{px}$ மற்றும் $y'' = p^2e^{px}$

இவ்வகைக் கெழுக்கள், சார்பு $y = e^{px}$ போன்றே அமைந்துள்ளதைக் காண்க. மேலும்,

$L(y) = a_0y'' + a_1y' + a_2y$ எனில்

$$L(y) = L(e^{px})$$
$$= (a_0p^2e^{px} + a_1pe^{px} + a_2\, e^{px})$$
$$= (a_0p^2 + a_1p + a_2)e^{px}$$

ஆதலால் $L(y) = 0$ எனில் $(a_0p^2 + a_1p + a_2)e^{px} = 0$.

$e^{px} \neq 0$ என்பதால் நமக்கு கிடைப்பது $a_0p^2 + a_1p + a_2 = 0$ … (3)

e^{px} ஆனது $L(y) = a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்வதால் p ஆனது $a_0p^2 + a_1p + a_2 = 0$வை நிறைவு செய்ய வேண்டும். மேலும் சார்பின் வெவ்வேறு வகைக்கெழுக்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பை போன்ற வடிவத்திலேயே காணப்படுவதால் $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ என்பதை தீர்வு காண e^{px}ஐ பயன்படுத்துவதே சிறந்ததாகும். எனவே, நமக்கு கீழ்க்கண்ட தேற்றம் கிடைக்கப் பெறுகிறோம் :

தேற்றம் : $a_0p^2 + a_1p + a_2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் λ எனில் $e^{\lambda x}$ என்பது $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$இன் ஒரு தீர்வாகும்.

8.5.1 வரையறை : $a_0p^2 + a_1p + a_2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை (2)இன் சிறப்புச் சமன்பாடு என்கிறோம்.

பொதுவாக, சிறப்புச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் λ_1 மற்றும் λ_2 எனில், பின்வரும் மூன்று நிலைகள் எழுகின்றன.

***நிலை* (i) :** λ_1 மற்றும் λ_2 மெய் எண்கள் மற்றும் வெவ்வேறானவை என்க.

இந்நிலையில் $e^{\lambda_1 x}$ மற்றும் $e^{\lambda_2 x}$ ஆகியவை மேற்கூறிய தேற்றத்தின்படி (2)இன் தீர்வுகள் ஆகும். மற்றும் இவற்றின் நேரியச் சேர்க்கைகளான $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ என்பதும் (2)இன் ஒரு தீர்வாகும். ஏனெனில்

$$L(y) = a_0(c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x})'' + a_1(c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x})' + a_2(c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x})$$

$$= c_1(a_0\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2)e^{\lambda_1 x} + c_2(a_0\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_2)e^{\lambda_2 x} = c_1 \,.\, 0 + c_2 \,.\, 0 = 0.$$

மற்றும் $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ என்ற தீர்வினை நிரப்புச் சார்பு (complementary function) என அழைக்கப்படுகிறது.

***நிலை* (ii)** : λ_1 மற்றும் λ_2 கலப்பெண்கள். இவ்வாறாயின் $\lambda_1 = a + ib$ மற்றும் $\lambda_2 = a - ib$ என்க.

இங்கு λ_1 மற்றும் λ_2 என்ற இரு மூலங்களும் கலப்பெண்களாக இருப்பதால் சமன்பாடுகளின் கொள்கைப்படி

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \,.\, e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) \text{ மற்றும்}$$

$$e^{\lambda_2 x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே இதன் தீர்வு

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = e^{ax}\left[(c_1 + c_2)\cos bx + i(c_1 - c_2)\sin bx\right]$$

$$= e^{ax}[A \cos bx + B \sin bx]$$

இங்கு $A = c_1 + c_2$ மற்றும் $B = (c_1 - c_2)i$

எனவே $e^{ax}[A \cos bx + B \sin bx]$ என்பது நிரப்புச் சார்பு ஆகும்.

***நிலை* (iii) :** மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமானவை $\lambda_1 = \lambda_2$ (என்க)

இங்கு தெளிவாக $e^{\lambda_1 x}$ என்பது (2)இன் தீர்வுகளில் ஒன்றாகும். மடங்கு மூலங்களின் பண்பின்படி $xe^{\lambda_1 x}$ என்பது (2)இன் மற்றொரு தீர்வு என பெறுகிறோம். இதன் நேரியச் சேர்க்கை $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$ என்பது தீர்வாக அல்லது நிரப்புச் சார்பாக அமைகிறது. (அ.து.), $y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x}$ என்பது தீர்வாக அமைகிறது. மேலே விவாதிக்கப்பட்ட அனைத்தும் சுருக்கமாக பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது. :

$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \ldots$ என்பது தரப்பட்டச் சமன்பாடாகும்.

அதன் சிறப்புச் சமன்பாடு $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0 \ldots$ ஆகும்.

இதன் மூலங்கள் λ_1, λ_2 என்க. எனவே (2)இன் தீர்வு

$$y = \begin{cases} Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} & \lambda_1 \text{ மற்றும் } \lambda_2 \text{ வேறுபட்ட மெய்யெண்கள் எனில்} \\ e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) & \lambda_1 = a + ib \text{ மற்றும் } \lambda_2 = a - ib \text{ எனில்} \\ (A + Bx)e^{\lambda_1 x} & \lambda_1 = \lambda_2 \text{ (மெய்)} \end{cases}$$

A மற்றும் B என்பவை மாறத்தக்க மாறிலிகள் ஆகும்.

பொதுத் தீர்வு :

மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை முதற்படி (நேரிய) வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு இரு பகுதிகளைக் கொண்டது. அவை நிரப்புச் சார்பு (C.F) மற்றும் சிறப்புத் தீர்வு (P.I.) ஆகும்.

செயல் விதி :

நிரப்புச் சார்பு பெறுவதற்கு நாம் சமன்பாடு $a_0\dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1\dfrac{dy}{dx} + a_2y = 0$இன் தீர்வு காண்போம். அதன் தீர்வு $y = u$ (என்க). இதன் பொதுத் தீர்வு $y = u + v$ ஆகும். இங்கு v என்பது (1)இன் சிறப்புத் தீர்வு (Particular Integral) ஆகும்.

சார்பு u, அதாவது C.F. சமப்படித்தான சமன்பாட்டோடு தொடர்புடையது. மேலும் v, சிறப்புத் தீர்வு X உடன் தொடர்புடையது. இங்கு $X = 0$ எனில் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு, நிரப்புச் சார்பாக அமையும்.

குறிப்பு : இப்பகுதியில் கீழ்க்காணும் வகையில் வகையீட்டுச் செயலிகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$D \equiv \frac{d}{dx} \text{ மற்றும் } D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2} \quad ; \quad Dy = \frac{dy}{dx} \quad ; \quad D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}$$

8.5.2 சிறப்புத் தீர்வு காணும் முறை
(Method for finding Particular Integral) :

(a) Xஆனது $e^{\alpha x}$, α ஒரு மாறிலி என்ற வடிவில் உள்ளது

$$D(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x} \; ; \; D^2(e^{\alpha x}) = \alpha^2 e^{\alpha x} \; \ldots$$

$$D^n(e^{\alpha x}) = \alpha^n e^{\alpha x}, \text{ எனில் } f(D)\, e^{\alpha x} = f(\alpha)\, e^{\alpha x} \quad \ldots (1)$$

$\dfrac{1}{f(D)}$ ஆனது $f(D)$இன் தலைகீழ் செயலி என்பதைக் காண்க.

(1)இன் இரு பக்கத்தையும் $\dfrac{1}{f(D)}$ யால் செயல்படுத்தக் கிடைப்பது

$$f(D) \cdot \frac{1}{f(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{f(D)} f(\alpha) e^{\alpha x}$$

$$\Rightarrow e^{\alpha x} = \frac{1}{f(D)} f(\alpha) e^{\alpha x} \quad (\because f(D) \cdot \frac{1}{f(D)} = I)$$

எனவே $\frac{1}{f(\alpha)} e^{\alpha x} = \frac{1}{f(D)} e^{\alpha x}$

இவ்வாறாக *P.I.* என்பது $\frac{1}{f(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{f(\alpha)} e^{\alpha x}$ …(2)

எனக் குறியீடு மூலம் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

(2) ஆனது $f(\alpha) \neq 0$ஆக இருக்கும்போது மட்டுமே பொருந்தும்.

$f(\alpha) = 0$ எனில் $D = \alpha$ என்பது $f(D) = 0$ என்கிற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின், சிறப்புச் சமன்பாட்டின் மூலமாகும். எனவே $(D - \alpha)$ என்பது $f(D)$இன் ஒரு காரணியாகும்.

$f(D) = (D - \alpha)\, \theta(D)$, $\theta(\alpha) \neq 0$ என்க.

$$\frac{1}{f(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{(D-\alpha)\,\theta(D)} \cdot e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{D-\alpha} \cdot \frac{1}{\theta(\alpha)} e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{\theta(\alpha)} \frac{1}{D-\alpha} e^{\alpha x} \ldots (3)$$

$$\frac{1}{(D-\alpha)} e^{\alpha x} = y \Rightarrow (D - \alpha) y = e^{\alpha x}$$

எனவே $ye^{-\int \alpha\, dx} = \int e^{\alpha x} . e^{-\int \alpha\, dx} . dx$

(அ.து.), $ye^{-\alpha x} = \int e^{\alpha x} e^{-\alpha x} dx \Rightarrow y = e^{\alpha x} x$

(3)இல் பிரதியிடக் கிடைப்பது,

$$\frac{1}{f(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{\theta(\alpha)} x e^{\alpha x}$$

மேலும் $\theta(\alpha) = 0$ எனில் $D = \alpha$ என்பது $f(D) = 0$க்கு இருமுறை வரும் மூலமாகும்.

எனவே $\frac{1}{f(D)} e^{\alpha x} = \frac{x^2}{2} e^{\alpha x}$

எடுத்துக்காட்டு 8.22 : தீர்க்க: $(D^2 + 5D + 6)y = 0$ (அல்லது) $y'' + 5y' + 6y = 0$

தீர்வு : *C.F.*ஐ காண்பதற்கு சிறப்புச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண வேண்டும்.

$$p^2 + 5p + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (p + 2)(p + 3) = 0 \Rightarrow p = -2 \text{ மற்றும் } p = -3$$

$C.F.$ ஆனது $Ae^{-2x} + Be^{-3x}$ ஆகும்.

எனவே பொதுத்தீர்வு ஆனது $y = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$

இங்கு A மற்றும் B மாறத்தக்க மாறிலிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.23 : *தீர்க்க* : $(D^2 + 6D + 9)y = 0$

தீர்வு : *சிறப்புச் சமன்பாடு*

$$p^2 + 6p + 9 = 0$$

$$\text{(அ.து.),} \quad (p + 3)^2 = 0 \Rightarrow p = -3, -3$$

C.F. ஆனது $(Ax + B)e^{-3x}$ ஆகும்.

எனவே பொதுத் தீர்வு ஆனது $y = (Ax + B)e^{-3x}$

இங்கு A மற்றும் B மாறத்தக்க மாறிலிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.24 : *தீர்க்க* : $(D^2 + D + 1)y = 0$

தீர்வு : *சிறப்புச் சமன்பாடு* $p^2 + p + 1 = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \; p = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

எனவே பொதுத் தீர்வு என்பது $y = e^{-x/2}\left[A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

இங்கு A மற்றும் B மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.25 : *தீர்க்க* : $(D^2 - 13D + 12)y = e^{-2x}$

தீர்வு : *சிறப்புச் சமன்பாடு* $p^2 - 13p + 12 = 0$

$$\Rightarrow (p - 12)(p - 1) = 0 \Rightarrow p = 12 \text{ மற்றும் } 1$$

C.F. ஆனது $Ae^{12x} + Be^{x}$ ஆகும்.

சிறப்புத் தீர்வு
$$P.I. = \frac{1}{D^2 - 13D + 12}e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{(-2)^2 - 13(-2) + 12}e^{-2x} = \frac{1}{4 + 26 + 12}e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{42}e^{-2x}$$

எனவே பொதுத் தீர்வு என்பது $y = CF + PI \Rightarrow y = Ae^{12x} + Be^{x} + \frac{1}{42}e^{-2x}$

எடுத்துக்காட்டு 8.26 : *தீர்க்க* : $(D^2 + 6D + 8)y = e^{-2x}$

தீர்வு : *சிறப்புச் சமன்பாடு* $p^2 + 6p + 8 = 0$

$$\Rightarrow (p+4)\ (p+2) = 0 \Rightarrow p = -4 \text{ மற்றும் } -2$$

C.F. *என்பது* $Ae^{-4x} + Be^{-2x}$ *ஆகும்.*

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு } P.I. = \frac{1}{D^2 + 6D + 8} e^{-2x} = \frac{1}{(D+4)\ (D+2)} e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{\theta(-2)} xe^{-2x} = \frac{1}{2} xe^{-2x} \quad [\text{ஏனெனில் } f(D) = (D+2)\,\theta(D)]$$

எனவே பொதுத் தீர்வு $y = Ae^{-4x} + Be^{-2x} + \frac{1}{2} xe^{-2x}$

எடுத்துக்காட்டு 8.27 : *தீர்க்க* : $(D^2 - 6D + 9)y = e^{3x}$

தீர்வு : *சிறப்புச் சமன்பாடு என்பது* $p^2 - 6p + 9 = 0$

$$(p-3)^2 = 0 \Rightarrow p = 3, 3$$

C.F. *என்பது* $(Ax + B)e^{3x}$ *ஆகும்.*

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு } P.I. = \frac{1}{D^2 - 6D + 9} e^{3x}$$

$$= \frac{1}{(D-3)^2} e^{3x} = \frac{x^2}{2} e^{3x}$$

எனவே பொதுத் தீர்வு $y = (Ax + B)e^{3x} + \frac{x^2}{2} e^{3x}$ *ஆகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 8.28 : *தீர்க்க* : $(2D^2 + 5D + 2)y = e^{-\frac{1}{2}x}$

தீர்வு : *சிறப்புச் சமன்பாடு* $2p^2 + 5p + 2 = 0$

$$\therefore\ p = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{2} \text{ மற்றும் } -2$$

C.F. *என்பது* $Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^{-2x}$

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு } P.I. = \frac{1}{2D^2 + 5D + 2} e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2\left(D + \frac{1}{2}\right)(D+2)} e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{1}{\theta\left(-\frac{1}{2}\right).2} xe^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{3} x e^{-\frac{1}{2}x}$$

எனவே பொதுத் தீர்வு $y = Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^{-2x} + \frac{1}{3} x e^{-\frac{1}{2}x}$

எச்சரிக்கை : *மேற்கூறிய கணக்கில் சிறப்புத் தீர்வினை கணக்கிடுவதற்காக எழுதப்பட்ட காரணிகளில் பூச்சியமாகும் காரணியில் Dஇன் கெழுவினை 1ஆக மாற்றப்பட்டிருப்பதைக் கவனிக்க.*

(b) *X*ஆனது sin *ax* அல்லது cos *ax*

செயல் விதி :

சூத்திரம் 1: $f(D)$ஐ D^2இன் சார்பாக $\phi(D^2)$ என எழுதவும்

மேலும் D^2ஐ $-a^2$ஆல் பிரதியிடவும். $\phi(-a^2) \neq 0$ எனில் பின்வரும் முடிவினை பயன்படுத்தலாம்.

$$P.I. = \frac{1}{f(D)} \cos ax = \frac{1}{\phi(D^2)} \cos ax = \frac{1}{\phi(-a^2)} \cos ax$$

எடுத்துக்காட்டாக $PI = \frac{1}{D^2+1} \cos 2x = \frac{1}{-2^2+1} \cos 2x = -\frac{1}{3} \cos 2x$

சூத்திரம் 2 : சில நேரங்களில் $\phi(D^2)$ என எழுத இயலாது. $\phi(D, D^2)$ என எழுதலாம். அதாவது D மற்றும் D^2ஐ கொண்ட சார்பு. இந்நிலையில் நாம் பின்வருமாறு செய்வோம்:

எடுத்துக்காட்டாக : $P.I. = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} \cos 3x$

$$= \frac{1}{-3^2 - 2D + 1} \cos 3x \qquad D^2\text{ஐ } -3^2\text{ஆல் மாற்ற}$$

$$= \frac{-1}{2(D+4)} \cos 3x$$

$$= \frac{-1}{2} \frac{D-4}{D^2 - 4^2} \cos 3x \qquad [D-4\text{ஆல் பெருக்கி, வகுக்க}]$$

$$= \frac{-1}{2} \frac{1}{-3^2 - 4^2} (D-4) \cos 3x$$

$$= \frac{1}{50} (D-4) \cos 3x$$

$$= \frac{1}{50} [D \cos 3x - 4 \cos 3x] = \frac{1}{50} [-3 \sin 3x - 4 \cos 3x]$$

சூத்திரம் 3 : $\phi(-a^2) = 0$ எனில் நாம் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில் கூறியது போல் தொடர்வோம் :

எடுத்துக்காட்டு $$P.I. = \frac{1}{\phi(D^2)}\cos ax = \frac{1}{D^2 + a^2}\cos ax$$

$$= \frac{1}{(D + ia)(D - ia)}\cos ax$$

$$= \text{R.P.}\left[\frac{1}{(D + ia)(D - ia)}e^{iax}\right] = R.P.\left[\frac{1}{\theta(ia)}xe^{iax}\right]$$

$$= \text{R.P.}\left[\frac{xe^{iax}}{2ia}\right]$$ ஏனெனில் $\theta(ia) = 2ia$

$$= \frac{-x}{2a}\left[i\,[\cos ax + i\sin ax]\text{ன் மெய்ப்பகுதி}\right]$$

$$= \frac{-x}{2a}(-\sin ax) = \frac{x}{2a}\sin ax$$

குறிப்பு : $X = \sin ax$ என்க

சூத்திரம் 1: $\frac{1}{\phi(-a^2)}\sin ax$

சூத்திரம் 2: $\cos ax$இல் பயன்படுத்திய முறை போலவே

சூத்திரம் 3: $\frac{1}{D^2 + a^2}\sin ax = \text{I.P.}\left[\frac{1}{(D + ia)(D - ia)}e^{iax}\right] = \frac{-x}{2a}\cos ax$

எடுத்துக்காட்டு 8.29 : தீர்க்க : $(D^2 - 4)y = \sin 2x$

தீர்வு : சிறப்புச் சமன்பாடு $p^2 - 4 = 0 \Rightarrow p = \pm 2$

$$C.F. = Ae^{2x} + Be^{-2x}\ ;$$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{D^2 - 4}(\sin 2x) = \frac{1}{-4-4}(\sin 2x) = -\frac{1}{8}\sin 2x$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு ஆனது $y = C.F. + P.I. \Rightarrow y = Ae^{2x} + Be^{-2x} - \frac{1}{8}\sin 2x$

எடுத்துக்காட்டு 8.30 : தீர்க்க : $(D^2 + 4D + 13)y = \cos 3x$

தீர்வு : சிறப்புச் சமன்பாடு $p^2 + 4p + 13 = 0$

$$p = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm i6}{2} = -2 \pm i3$$

$$C.F. = e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

$$P.I. = \frac{1}{D^2 + 4D + 13}(\cos 3x)$$

$$= \frac{1}{-3^2 + 4D + 13}(\cos 3x) = \frac{1}{4D + 4}(\cos 3x)$$

$$= \frac{(4D-4)}{(4D+4)(4D-4)}(\cos 3x) = \frac{4D-4}{16D^2 - 16}(\cos 3x)$$

$$= \frac{4D-4}{-160}(\cos 3x) = \frac{1}{40}(3 \sin 3x + \cos 3x)$$

எனவே பொதுத் தீர்வு ஆனது $y = C.F. + P.I.$

$$y = e^{-2x}(A \cos 3x + B \sin 3x) + \frac{1}{40}(3 \sin 3x + \cos 3x)$$

எடுத்துக்காட்டு 8.31 : தீர்க்க $(D^2 + 9)y = \sin 3x$

தீர்வு : சிறப்புச் சமன்பாடு $p^2 + 9 = 0 \Rightarrow p = \pm 3i$

$$C.F. = (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

$$P.I. = \frac{1}{D^2 + 9}\sin 3x$$

$$= \frac{-x}{6}\cos 3x \quad \because \frac{1}{D^2 + a^2}\sin ax = \frac{-x}{2a}\cos ax$$

எனவே $y = C.F. + P.I.$

(அ.து.), $y = (A \cos 3x + B \sin 3x) - \dfrac{x \cos 3x}{6}$

(c) *X* ஆனது *x* மற்றும் x^2

செயல் விதி : $f(x) = x$ எனில் P.I. $= c_0 + c_1 x$ எனவும் $f(x) = x^2$ எனில் P.I. $= c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ எனவும் எடுத்துக் கொள்க.

P.I.ஆனது $(aD^2 + bD + c)_y = f(x)$-இன் தீர்வாக இருக்குமாதலால் $y = c_0 + c_1 x$ அல்லது $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ ($f(x) = x$ or x^2-ஐ பொறுத்து) என அமையும்.

சமன்பாட்டில் y–இன் மதிப்பினை கொடுத்து ஒத்த உறுப்புகளை சமப்படுத்தி c_0, c_1 மற்றும் c_2-இன் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.32 : தீர்க்க : $(D^2 - 3D + 2)y = x$

தீர்வு :

சிறப்புச் சமன்பாடு $p^2 - 3p + 2 = 0 \Rightarrow (p-1)(p-2) = 0$

$$p = 1, 2$$

$$C.F. = (Ae^{x} + Be^{2x})$$

$$P.I. = c_0 + c_1 x \text{ என்க.}$$

$\therefore c_0 + c_1 x$ என்பது ஒரு தீர்வாகும்.

$\therefore (D^2 - 3D + 2)(c_0 + c_1 x) = x$

i.e., $(-3c_1 + 2c_0) + 2c_1 x = x$

$$\Rightarrow 2c_1 = 1 \quad \therefore \quad c_1 = \frac{1}{2}$$

$$(-3c_1 + 2c_0) = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{P.I.} = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

எனவே பொதுத் தீர்வு என்பது $y = C.F. + P.I.$

$y = Ae^{x} + Be^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$

எடுத்துக்காட்டு 8.33 : தீர்க்க : $(D^2 - 4D + 1)y = x^2$

தீர்வு : சிறப்புச் சமன்பாடு $p^2 - 4p + 1 = 0$

$$\Rightarrow p = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$C.F. = Ae^{(2 + \sqrt{3})x} + Be^{(2 - \sqrt{3})x}$$

$$P.I. = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \text{ என்க.}$$

P.I. ஒரு தீர்வாகும்.

$\therefore (D^2 - 4D + 1)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = x^2$

i.e., $(2c_2 - 4c_1 + c_0) + (-8c_2 + c_1)x + c_2 x^2 = x^2$

$c_2 = 1$

$-8c_2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 8$

$2c_2 - 4c_1 + c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 30$

P.I. $= x^2 + 8x + 30$

எனவே பொதுத் தீர்வு என்பது $y = C.F. + P.I.$

$y = Ae^{(2 + \sqrt{3})x} + Be^{(2 - \sqrt{3})x} + (x^2 + 8x + 30)$

பயிற்சி 8.5

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும் :

(1) $(D^2 + 7D + 12)y = e^{2x}$ (2) $(D^2 - 4D + 13)y = e^{-3x}$

(3) $(D^2 + 14D + 49)y = e^{-7x} + 4$ (4) $(D^2 - 13D + 12)y = e^{-2x} + 5e^x$

(5) $(D^2 + 1)\ y = 0$. இங்கு $x = 0$ எனில் $y = 2$ மேலும் $x = \frac{\pi}{2}$ எனில் $y = -2$

(6) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2e^{3x}$. இங்கு $x = \log 2$ எனில் $y = 0$ மற்றும் $x = 0$ எனில் $y = 0$

(7) $(D^2 + 3D - 4)\ y = x^2$ (8) $(D^2 - 2D - 3)y = \sin x\ \cos x$

(9) $D^2y = -9 \sin 3x$ (10) $(D^2 - 6D + 9)\ y = x + e^{2x}$

(11) $(D^2 - 1)y = \cos 2x - 2 \sin 2x$ (12) $(D^2 + 5)y = \cos^2 x$

(13) $(D^2 + 2D + 3)y = \sin 2x$ (14) $(3D^2 + 4D + 1)y = 3e^{-x/3}$

8.6. பயன்பாடுகள் (Applications) :

இப்பகுதியில் நாம் நம் வாழ்க்கையை பிரதிபலிக்கும் சில சூழ்நிலைப் பிரச்சினைகளை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் மூலம் தீர்வு காண்பதைப் பற்றி பார்ப்போம். இக்கணக்குகளை தீர்ப்பதற்கு மேற்கொள்ள வேண்டியவை

(i) சூழ்நிலைக்கேற்றவாறு கணித மாதிரிகளை உருவாக்குதல்.

(ii) மேலே கூறப்பட்டுள்ள முறைகளைப் பயன்படுத்தி (i)இல் உருவாக்கப்பட்டுள்ள கணித மாதிரிகளுக்கு தீர்வு காணுதல்.

விளக்கக் குறிப்பு :

t என்ற நேரத்தில் ஒரு பொருளின் இருப்பு A என்க. Aயின் மாறு வீதம் ஆரம்ப நிலையில் உள்ள இருப்புக்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும். i.e., $\frac{dA}{dt} \propto A$ i.e., $\frac{dA}{dt} = kA$ இங்கு k என்பது விகிதச்சம மாறிலியாகும்.

(1) $k > 0$ எனில். A என்பது அடுக்கை வேகத்தில் அதிகரிக்கும். (அதிகரிக்கும் நிலை)

(2) $k < 0$ எனில். A என்பது அடுக்கை வேகத்தில் குறையும். (குறையும் நிலை)

எல்லா பயன்பாட்டுக் கணக்குகளிலும் பொருளின் இருப்பின் மாறுவீதம் ஆரம்ப இருப்புக்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும் என்ற கோட்பாட்டின்படி தீர்வு காண்கிறோம்,

(அ.து.) $\frac{dA}{dt} \propto A$ அல்லது $\frac{dA}{dt} = kA$

(இங்கு கணக்கைப் பொறுத்து k மிகையாகவோ அல்லது குறையாகவோ அமையும்). இந்நேரியச் சமன்பாட்டினை மூன்று வழிகளில் தீர்க்கலாம். (i) மாறிகள் பிரிக்கக் கூடியன (ii) தொகையீட்டுக் காரணியைப் பயன்படுத்தி (iii) k என்ற ஒரு மூலத்தைக் கொண்ட சிறப்புச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி. எல்லா வழிகளிலும் $A = ce^{kt}$ என்ற தீர்வைப் பெறலாம். இங்கு c என்பது மாறத்தக்க மாறிலியாகும். பொதுவாக கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து cயையும் kயையும் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். சில நேரங்களில் எடுத்துக்காட்டு 8.35ல் கொடுக்கப்பட்டது போல் k நேரடியாகக் கொடுக்கப்படலாம். எடுத்துக்காட்டு 8.38ல் $\frac{dA}{dt}$ நேரடியாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தீர்வு : $\frac{dA}{dt} = kA$

(i) $\frac{dA}{A} = kdt \quad \Rightarrow \quad \log A = kt + \log c$

$\Rightarrow \quad A = e^{kt + \log c} \Rightarrow A = ce^{kt}$

(ii) $\frac{dA}{dt} - kA = 0$ என்பது Aயில் நேரியச் சமன்பாடாகும்.

$$I.F. = e^{-kt}$$

$$Ae^{-kt} = \int e^{-kt}\, O\, dt + c \Rightarrow Ae^{-kt} = c$$

$$A = ce^{kt}$$

(iii) $(D - k)A = 0$

$p - k = 0$ என்பது சிறப்புச் சமன்பாடாகும். $\Rightarrow p = k$

C.F. என்பது ce^{kt}

இங்கு சிறப்புத் தீர்வு ($P.I.$) கிடையாது.

$\therefore A = ce^{kt}$

(iv) நியூட்டனின் குளிர்ச்சி விதிப்படி (அ.து.) (ஒரு பொருளின் வெப்ப நிலையின் மாறுவீதமானது பொருளின் மற்றும் சுற்றுப்புறத்தின் வெப்ப நிலைகளின் வித்தியாசத்திற்கு நேர் விகிதமாக அமையும்). அ.து., $\frac{dT}{dt} = k(T - S)$

[T– பொருளின் வெப்ப நிலை, S – சுற்றுப்புற வெப்ப நிலை]

$$\frac{dT}{T - S} = kdt \Rightarrow \log (T - S) = kt + \log c \Rightarrow T - S = ce^{kt} \Rightarrow T = S + ce^{kt}$$

எடுத்துக்காட்டு 8.34 : ஒரு இரசாயன விளைவில், ஒரு பொருள் மாற்றம் அடையும் மாறு வீதமானது t நேரத்தில் மாற்றமடையாத அப்பொருளின்

அளவிற்கு விகிதமாக உள்ளது. ஒரு மணி நேர முடிவில் 60 கிராமும் மற்றும் 4 மணி நேர முடிவில் 21 கிராமும் மீதமிருந்தால், ஆரம்ப நிலையில், அப்பொருளின் எடையினைக் காண்க..

தீர்வு : t என்ற நேரத்தில் பொருளின் இருப்பு A என்க.

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \;\Rightarrow\; A = ce^{kt}$$

$$t = 1 \text{ எனில் }, \quad A = 60 \Rightarrow ce^{k} = 60 \qquad \ldots (1)$$

$$t = 4 \text{ எனில், } A = 21 \;\Rightarrow ce^{\,4k} = 21 \qquad \ldots (2)$$

$$(1) \Rightarrow c^4e^{4k} = 60^4 \qquad \ldots (3)$$

$$\frac{(3)}{(2)} \;\Rightarrow\; c^3 = \frac{60^4}{21} \;\Rightarrow\; c = 85.15 \;\; (\text{மடக்கையைப் பயன்படுத்தி})$$

ஆரம்பத்தில் (அ.து.) $t = 0$வில் $A = c = 85.15$ கிராம் (தோராயமாக)

∴ ஆரம்பத்தில் பொருளின் எடை 85.15 கிராம் (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 8.35 : ஒரு வங்கியானது தொடர் கூட்டு வட்டி முறையில் வட்டியைக் கணக்கிடுகிறது. அதாவது வட்டி வீததத்தை அந்தந்த நேரத்தில் அசலின் மாறு வீததத்தில் கணக்கிடுகிறது. ஒருவரது வங்கி இருப்பில் தொடர்ச்சியான கூட்டு வட்டி மூலம் ஆண்டொன்றுக்கு 8% வட்டி பெருகுகிறது எனில், அவரது வங்கியிருப்பின் ஒரு வருட கால அதிகரிப்பின் சதவீதத்தைக் கணக்கிடுக. [$e^{.08} \approx 1.0833$ எடுத்துக் கொள்க.]

தீர்வு : t எனும் நேரத்தில் அசல் A என்க.

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \;\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 0.08\,A, \text{ இங்கு } k = 0.08 \text{ அ.து., } 8\%$$

$$\Rightarrow\; A(t) = ce^{0.08t}$$

$$\text{ஒரு வருட அதிகரிப்பு சதவீதம்} = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} \times 100$$

$$= \left(\frac{A(1)}{A(0)} - 1\right) \times 100 = \left(\frac{c.\, e^{0.08}}{c} - 1\right) \times 100 = 8.33\%$$

எனவே ஒரு ஆண்டில் அதிகரிக்கும் சதவீதம் = 8.33%

எடுத்துக்காட்டு 8.36 :

ஒரு குளிர்ச்சியடையும் பொருளின் வெப்பநிலை அளவு T ஆனது குறையும் மாறு வீதம் $T - S$ என்ற வித்தியாசத்திற்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. இங்கு S என்பது சுற்றுப்புறத்தின் நிலையான வெப்ப நிலையாகும். ஆரம்பத்தில் $T = 150°C$ எனில் t நேரத்தில் குளிர்ச்சியடையும் பொருளின் வெப்பநிலையைக் காண்க.

தீர்வு : t நேரத்தில் குளிர்ச்சி அடையும் பொருளின் வெப்பம் T என்க.

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - S) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = k\,(T - S) \Rightarrow T - S = ce^{kt}, \text{ இங்கு } k \text{ குறை எண்}$$

$\Rightarrow \ T = S + ce^{kt}$

$t = 0$ எனில் $T = 150 \Rightarrow 150 = S + c \Rightarrow c = 150 - S$

$\therefore$ எந்த நேரத்திலும் குளிர்ச்சி அடையும் பொருளின் வெப்ப நிலை

$T = S + (150 - S)e^{kt}$

குறிப்பு : k குறை எண் ஆதலால். t ஏறும்போது T குறைகிறது.

kக்கு பதிலாக $-k$, $k > 0$ எனவும் எடுக்கலாம். அவ்வாறாயின் விடை $T = S + (150 - S)e^{-kt}$ ஆகும். இங்கும் t ஏறும்போது T குறைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.37 : ஒரு இறந்தவர் உடலை மருத்துவர் பரிசோதிக்கும் போது, இறந்த நேரத்தைதோராயமாக கணக்கிட வேண்டியுள்ளது. இறந்தவரின் உடலின் வெப்ப நிலை காலை 10.00 மணியளவில் 93.4°F என குறித்துக் கொள்கிறார். மேலும் 2 மணி நேரம் கழித்து வெப்ப நிலை அளவை 91.4°F எனக் காண்கிறார். அறையின் வெப்ப நிலை அளவு (நிலையானது) 72°F எனில், இறந்த நேரத்தைக் கணக்கிடுக. (ஒரு மனித உடலின் சாதாரண உஷ்ண நிலை 98.6°F எனக் கொள்க).

$$\left[\log_e \frac{19.4}{21.4} = -\,0.0426 \times 2.303 \ \text{ மற்றும் } \ \log_e \frac{26.6}{21.4} = 0.0945 \times 2.303\right]$$

தீர்வு : t என்ற நேரத்தில் உடலின் வெப்பநிலையினை T என்க.

நியூட்டனின் குளிர்ச்சி விதிப்படி. $\frac{dT}{dt} \,\alpha\, (T - 72)$ [ஏனெனில் $S = 72°F$]

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - 72) \Rightarrow T - 72 = ce^{kt}$$

அல்லது $T = 72 + ce^{kt}$

[முதலில் குறிக்கப்பட்ட நேரம் காலை 10 மணி என்பது $t = 0$ என்க].

$t = 0$ஆக இருக்கும்போது $T = 93.4°F$

$$\Rightarrow \ c = 21.4\ 0$$

$$\therefore T = 72 + 21.4e^{kt}$$

[தோராயத்தின் துல்லியத்தன்மையை அதிகரிக்க மணியானது நிமிடமாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.]

$t = 120$ எனில், $T = 91.4 \Rightarrow e^{120k} = \frac{19.4}{21.4} \Rightarrow k = \frac{1}{120} \log_e\left(\frac{19.4}{21.4}\right)$

$= \frac{1}{120}\,(-\,0.0426 \times 2.303)$

t_1 என்பது இறந்த நேரத்திற்குப் பின் காலை 10 மணிக்கு உள்ளான நேரம் என்க.

$t = t_1$ எனும்போது $T = 98.6 \Rightarrow 98.6 = 72 + 21.4\, e^{kt_1}$

$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{k} \log_e\left(\frac{26.6}{21.4}\right) = \frac{-\,120 \times 0.0945 \times 2.303}{0.0426 \times 2.303} = -\,266$ நிமிடம்

அ.து., முதல் அளவீடான காலை 10 *மணிக்கு முன்னதாக* 4 *மணி* 26 *நிமிடம்.*

$\therefore$ *இறந்த நேரம் தோராயமாக* 10.00 *மணி* – 4 *மணி* 26 *நிமிடம்.*

(அ.து.). இறந்த நேரம் தோராயமாக 5.34 A.M.

குறிப்பு : *இக்கணக்கில் வெப்ப நிலையானது குறையும் தன்மையைக் கொள்வதால்* $\frac{dT}{dt} = -k(T-72)$ *எனவும் கொள்ளலாம். இங்கு* $k > 0$

எடுத்துக்காட்டு 8.38 : *ஒரு நோயாளியின் சிறுநீரிலிருந்து வேதிப்பொருள் வெளியேறும் அளவினை தொடர்ச்சியாக கேத்தேடர்* (catheter) *என்ற கருவியின் மூலம் கண்காணிக்கப்படுகிறது.* $t = 0$ *என்ற நேரத்தில் நோயாளிக்கு* 10 *மி.கிராம் வேதிப்பொருள் கொடுக்கப்படுகிறது. இது* $-3t^{1/2}$ *மி.கிராம்/மணி என்னும் வீதத்தில் வெளியேறுகிறது எனில்,*

(i) *நேரம்* $t > 0$ *எனும் போது, நோயாளியின் உடலிலுள்ள வேதிப்பொருளின் அளவைக் காணும் பொதுச் சமன்பாடு என்ன?*

(ii) *முழுமையாக வேதிப் பொருள் வெளியேற எடுத்துக் கொள்ளும் குறைந்தபட்ச கால அளவு என்ன?*

தீர்வு : (i) t *என்ற நேரத்தில் வேதிப்பொருளின் எடை* A *என்க.*

வேதிப்பொருள் வெளியேறும் வீதம் $= -3t^{\frac{1}{2}}$

$$\text{(அ.து.)} \quad \frac{dA}{dt} = -3t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow A = -2t^{\frac{3}{2}} + c$$

$$t = 0 \text{ எனில், } A = 10 \Rightarrow c = 10$$

t *எனும் நேரத்தில்* $\quad A = 10 - 2t^{\frac{3}{2}}$

(ii) $A = 0$ *எனில் வேதிப்பொருள் முழுமையாக வெளியேறி விட்டது எனப் பொருள்*

$$0 = 10 - 2t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 5 = t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow t^3 = 25 \Rightarrow t = 2.9 \text{ மணி}$$

எனவே நோயாளியின் உடலிலிருந்து 2.9 *மணி அல்லது* 2 *மணி* 54 *நிமிடத்தில் வேதிப்பொருள் முழுமையாக வெளியேறும்.*

எடுத்துக்காட்டு 8.39 : *நுண்ணுயிர்களின் பெருக்கத்தில், பாக்டீரியாவின் பெருக்கவீதமானது அதில் காணப்படும் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. இப்பெருக்கத்தால் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை* 1 *மணி நேரத்தில் மும்மடங்காகிறது எனில் ஐந்து மணி நேர முடிவில் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை ஆரம்ப நிலையைக் காட்டிலும்* 3^5 *மடங்காகும் எனக் காட்டுக.*

தீர்வு : t *நேரத்தில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை* A *என்க.*

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow A = ce^{kt}$$

ஆரம்பத்தில் (அ.து.) $t = 0$ எனும் போது. $A = A_0$ என்க.

$$\therefore\ A_0 = ce^{\circ} = c$$

$$\therefore\ A = A_0 e^{kt}$$

$t = 1$ எனும்போது $A = 3A_0 \Rightarrow 3A_0 = A_0 e^k \Rightarrow e^k = 3$

$t = 5$ எனும்போது $A = A_0 e^{5k} = A_0 (e^k)^5 = 3^5 . A_0$

$\therefore$ 5 மணி நேர முடிவில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை 3^5 மடங்காகும்.

பயிற்சி 8.6

(1) ரேடியம் (Radium) சிதையும் மாறுவீதமானது, அதில் காணப்படும் அளவிற்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. 50 வருடங்களில் ஆரம்ப அளவிலிருந்து 5 சதவீதம் சிதைந்திருக்கிறது எனில் 100 வருட முடிவில் மீதியிருக்கும் அளவு என்ன? [A_0ஐ ஆரம்ப அளவு எனக் கொள்க].

(2) ரூ. 1000 என்ற தொகைக்கு தொடர்ச்சி கூட்டு வட்டி கணக்கிடப்படுகிறது. வட்டி வீதம் ஆண்டொன்றுக்கு 4 சதவீதமாக இருப்பின். அத்தொகை எத்தனை ஆண்டுகளில் ஆரம்பத் தொகையைப் போல் இரு மடங்காகும்? ($\log_e 2 = 0.6931$).

(3) வெப்ப நிலை 15°C உள்ள ஒரு அறையில் வைக்கப்பட்டுள்ள தேநீரின் வெப்ப நிலை 100°C ஆகும். அது 5 நிமிடங்களில் 60°C ஆக குறைந்து விடுகிறது. மேலும் 5 நிமிடம் கழித்து தேநீரின் வெப்ப நிலையினை காண்க.

(4) ஒரு நகரத்தில் உள்ள மக்கள் தொகையின் வளர்ச்சிவீதம் அந்நேரத்தில் உள்ள மக்கள் தொகைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. 1960ஆம் ஆண்டில் மக்கள் தொகை 1,30,000 எனவும் 1990இல் மக்கள் தொகை 1,60,000 ஆகவும் இருப்பின் 2020ஆம் ஆண்டில் மக்கள் தொகை எவ்வளவாக இருக்கும்? $\left[\log_e \left(\frac{16}{13}\right) = .2070\ ;\ e^{.42} = 1.52\right]$

(5) ஒரு கதிரியக்கப் பொருள் சிதையும் மாறுவீதமானது, அதன் எடைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. அதன் எடை 10 மி.கிராம் ஆக இருக்கும் போது சிதையும் மாறுவீதம் நாளொன்றுக்கு 0.051 மி.கிராம் எனில் அதன் எடை 10 கிராமிலிருந்து 5 கிராமாகக் குறைய எடுத்துக் கொள்ளும் கால அளவைக் காண்க. [$\log_e 2 = 0.6931$]

9. தனிநிலை கணக்கியல்
(DISCRETE MATHEMATICS)

கணிதத்தின் பல்வேறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட தலைப்புகளைப் பற்றி ஆராய்வது தனிநிலை கணக்கியல் ஆகும். இத்தலைப்புகள் கணிணி அறிவியலைப் பற்றி அறிந்து கொள்ள மிகவும் உதவியாக இருக்கும். எல்லா தலைப்புகளைப் பற்றி படிப்பது மிகவும் கடினம் ஆதலால், முக்கியமான இரண்டு தலைப்புகளான "தர்க்க கணிதம்" (Mathematical logic) *மற்றும் "குலங்கள்"* (Groups) *மட்டும் இங்கு அறிமுகப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. இவை மாணவர்களுக்கு கணிணி அறிவியலுடன் தொடர்புடைய நடைமுறை பயன்பாடுகளுக்கு மிகவும் உதவியாக இருக்கும்.*

9.1 தர்க்க கணிதம் : அறிமுகம் :

தர்க்கம் எல்லா வகை விவாதங்களையும் ஆராய்கிறது, இவ்விவாதங்கள் சட்ட ரீதியானதாகவோ, கணித நிரூபணங்களாகவோ, அல்லது அறிவியல் கொள்கையின் முடிவுகளாகவோ இருக்கலாம். தர்க்கத்தைப் பற்றிய முதல் புத்தகம் அரிஸ்டாட்டில் (Aristotle) (384 – 322 *கி.மு.*) *என்பவரால் எழுதப்பட்டது. தர்க்கத்தில் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தும் முறையை காட்ஃப்ரைட் லீபினிட்ஸ்* (Gottfried Leibnitz) *என்பவர் அறிமுகப்படுத்தினார். இது பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டில் ஜார்ஜ்ஃபூல்* (George Boole) *மற்றும் அகஸ்டஸ் டிமார்கன்* (Augustus De'Morgan) *என்பவர்களால் நடைமுறைப்படுத்தப்பட்டது.*

அறிவியலின் பல்வேறு கிளைகளில் தர்க்கம் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. கணிணி அறிவியலின் கிளைகளான இலக்கமுறை தர்க்கம், வட்டகை திட்ட அமைப்பு, செயற்கை அறிவு நுட்பம் ஆகியவற்றிற்கு தர்க்கமானது அடிப்படைக் கொள்கையாக விளங்குகிறது.

நாம் நம்முடைய எண்ணங்களை வார்த்தைகளால் வெளிப்படுத்துகிறோம். நம்முடைய அன்றாட வாழ்க்கையுடன் வார்த்தைகள் தொடர்பு உடையனவாயிருப்பதால் நிச்சயமற்ற தன்மைகள் ஏற்படுவதற்கு வாய்ப்புகள் உண்டு. இதனைத் தவிர்க்கும் பொருட்டு குறியீடுகள் பயன்படுத்துகிறோம். இவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டு, நுண்மையானவையாயும், நடுநிலை வகிப்பனவாயும் இருக்கும். இவற்றை எளிதில் எழுதவும் கையாளவும் முடியும். இதனால்தான், தர்க்க கணிதத்தினை, குறியீட்டுத் தர்க்கம் (symbolic logic) *என்றும் அழைப்பர்.*

9.1.1 தர்க்கக் கூற்று அல்லது பிரேரணை
(Logical statement or proposition) :

கூற்று அல்லது பிரேரணை என்பது ஒரு வாக்கியமாகும். இவ்வாக்கியத்தின் பொருள் உண்மையாயிருக்கலாம் அல்லது தவறாயிருக்கலாம். ஆனால் இரண்டும் கலந்து இருத்தல் கூடாது.

***எடுத்துக்காட்டு* 1 :**

(அ) *பின்வரும் வாக்கியங்களைக் காண்போம் :*

(i) *தமிழ்நாட்டின் தலைநகரம் சென்னை.*

(ii) *பூமி ஒரு கிரகம்.*

(iii) *ரோசா ஒரு பூ.*

மேற்கண்ட வாக்கியங்கள் ஒவ்வொன்றும் உண்மையானவை. எனவே அவை ஒவ்வொன்றும் ஒரு கூற்றாகும்.

(ஆ) *பின்வரும் வாக்கியங்களைக் காண்போம் :*

(iv) *ஒவ்வொரு முக்கோணமும் ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம்.*

(v) *மூன்றுடன் நான்கைக் கூட்டினால் எட்டு.*

(vi) *சூரியன் ஒரு கிரகம்.*

இவை ஒவ்வொன்றும் தவறானவை. எனவே ஒவ்வொன்றும் ஒரு கூற்றாகும்.

***எடுத்துக்காட்டு* 2 :**

(vii) *விளக்கை ஏற்று*

(viii) *நீ எங்கே செல்கின்றாய்?*

(ix) *உனக்கு இறைவன் வெற்றியை அளிப்பாராக.*

(x) *தாஜ்மகால் எவ்வளவு அழகாக இருக்கிறது !*

இவ்வாக்கியங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் உண்மை அல்லது தவறு என்று ஒதுக்கீடு செய்ய முடியாது. எனவே, அவை கூற்றல்ல. இவற்றில் (vii), *கட்டளையையும்* (viii), *கேள்வியையும்* (ix), *வாழ்த்தையும்* (x), *ஆச்சரியத்தையும் குறிக்கின்றன.*

***ஒரு கூற்றின் மெய் மதிப்பு* (Truth value of a statement) :**

ஒரு கூற்றின் உண்மை அல்லது தவறினை அக்கூற்றின் மெய்மதிப்பு என்பர். ஒரு கூற்று உண்மையாயின் அதன் மெய் மதிப்பை 'உண்மை' அல்லது T *எனவும் அது தவறு எனில் அதன் மெய்மதிப்பை 'தவறு' அல்லது* F *எனவும் கூறுவர்.* (T - True ; F – False).

எடுத்துக்காட்டு 1(*அ*)*ல் உள்ள எல்லா கூற்றுகளுக்கும் மெய்மதிப்பு* T*ஆகும். எடுத்துக்காட்டு* 1 (*ஆ*)*ல் உள்ள எல்லா கூற்றுகளுக்கும் மெய்மதிப்பு* F *ஆகும்.*

***தனிக் கூற்றுகள்* (Simple statements) :**

ஒரு கூற்றினை இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கூற்றுகளாகப் பிரிக்க இயலாவிடில் அக்கூற்றை தனிக்கூற்று என்பர். எடுத்துக்காட்டு 1(*அ*) *மற்றும்* (*ஆ*)*ல் உள்ள எல்லா கூற்றுகளும் தனிக்கூற்றுகளாகும்.*

***கூட்டுக் கூற்றுகள்* (Compound statements) :**

ஒரு கூற்றானது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கூற்றுகளின் சேர்ப்பாயின் அது ஒரு கூட்டுக் கூற்று எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : *மழை பொழிகிறது மற்றும் குளிர்ச்சியாகவுள்ளது.*

இது ஒரு கூட்டுக் கூற்றாகும். இது பின்வரும் இரண்டு தனிக்கூற்றுகளின் சேர்ப்பாகும்.

"*மழை பொழிகிறது*", "*குளிர்ச்சியாக உள்ளது*".

கூட்டுக் கூற்றுகளானவை எத்தனிக் கூற்றுகளின் கலப்பாக உள்ளனவோ, அத்தனிக்கூற்றுகள் கூட்டுக்கூற்றின் உள்கூற்றுகள் (sub-statements) *எனப்படும்.*

ஒரு கூட்டுக் கூற்றின் மெய்மதிப்பானது, அதன் உள்கூற்றுகளின் மெய் மதிப்புகளையும், அவை எவ்விதம் சேர்ந்து கூட்டுக்கூற்றை அமைக்கின்றன என்பதனையும் பொறுத்து அமையும். இது கூட்டுக் கூற்றின் அடிப்படை பண்பாகும்.

***அடிப்படை தர்க்க இணைப்புகள்* (Basic logical connectives) :**

தனிக்கூற்றுகளை ஒன்றுசேர்த்து கூட்டுக் கூற்றுகளை அடைகிறோம். அவ்வாறு ஒன்று சேர்ப்பதற்கு உதவியாக இருக்கும் வார்த்தைகளை இணைப்புகள் என்று கூறுவர். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கூற்றுகளை இணைத்து புதிய கூற்றுகளை உருவாக்குவதற்கு '*மற்றும்*', '*அல்லது*' *முதலியனவற்றை இணைப்புகளாகப் பயன்படுத்துகிறோம். இவ்வார்த்தைகளை ஆங்கிலத்தில்* 'and', 'or' *என்கிறோம். ஆங்கிலத்தில் இவற்றின் பயன்பாடு எப்பொழுதும் தெளிவானதாயும், நிச்சயமானதாயும் இருக்கும் என்று சொல்ல முடியாது. எனவே நிச்சயமான, தெளிவான அர்த்தங்களைத் தரக்கூடிய இணைப்புகளின் தொகுப்பை வரையறுத்து பயன்படுத்துவது அவசியமாகிறது. இது* '*தர்க்கமொழி*' *அல்லது* '*பொருள் மொழி*'*க்கு மிகவும் தேவையானதாக விளங்கும்.* '*மற்றும்*' (and) *என்பதற்குரிய அடிப்படை இணைப்பாக* '*இணையல்*' (conjunction) *என்பதனையும்,* '*அல்லது*' (or) *என்பதற்குரிய அடிப்படை இணைப்பாக* '*பிரிப்பிணைவு*' (disjunction) *என்பதனையும்,* '*அல்ல*' (not) *என்பதற்குரிய அடிப்படை இணைப்பாக* '*மறுப்பு*' (negation) *என்பதனையும் தொடர்புபடுத்துவோம்.*

இணையலை "$\wedge$" *என்ற குறியீட்டாலும், பிரிப்பிணைவு என்பதனை* "$\vee$" *என்ற குறியீட்டாலும், மறுப்பு என்பதனை* " ~ " *என்ற குறியீட்டாலும் குறிப்பிடுவோம்.*

***இணையல்* :** *இரண்டு தனிக்கூற்றுகள்* p, q *ஆனவை,* '*மற்றும்*'(and) *என்ற வார்த்தையால் இணைக்கப்படும்போது* 'p *மற்றும்* q' *என்ற கூட்டுக்கூற்றை அடைகிறோம். இது* p, q*-ன் இணையல் ஆகும். இதனை* '$p \wedge q$' *என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர்.*

எடுத்துக்காட்டு 1 : பின்வரும் தனிக்கூற்றுகளின் இணையலைக் காண்க.

p : ராம் புத்திசாலி.

q : ரவி அழகானவர்.

$p \wedge q$: ராம் புத்திசாலி மற்றும் ரவி அழகானவர்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : பின்வரும் கூற்றை குறியீட்டு அமைப்புக்கு மாற்றுக:

உஷாவும் மாலாவும் பள்ளிக்குச் செல்கின்றனர். தரப்பட்ட கூற்றை பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்:

'உஷா பள்ளிக்குச் செல்கிறாள்' மற்றும் 'மாலா பள்ளிக்குச் செல்கிறாள்'.

p : உஷா பள்ளிக்குச் செல்கிறாள்.

q : மாலா பள்ளிக்குச் செல்கிறாள்.

தரப்பட்ட கூற்றின் குறியீட்டு அமைப்பு $p \wedge q$ ஆகும்.

விதி : (A_1) p மற்றும் q இரண்டுமே மெய்மதிப்பு T பெற்றிருப்பின், $p \wedge q$-ன் மெய் மதிப்பும் T ஆகும்.

(A_2) p அல்லது q அல்லது இரண்டுமே மெய்மதிப்பு F பெற்றிருப்பின், $p \wedge q$-ன் மெய்மதிப்பும் F ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

பின்வரும் கூற்று ஒவ்வொன்றிற்கும் மெய்மதிப்பினைத் தருக:

(i) ஊட்டியானது தமிழ்நாட்டில் உள்ளது மற்றும் $3 + 4 = 8$

(ii) ஊட்டியானது தமிழ்நாட்டில் உள்ளது மற்றும் $3 + 4 = 7$

(iii) ஊட்டியானது கேரளாவில் உள்ளது மற்றும் $3 + 4 = 7$

(iv) ஊட்டியானது கேரளாவில் உள்ளது மற்றும் $3 + 4 = 8$

(i)-இல் $3 + 4 = 8$ என்ற கூற்றின் மெய்மதிப்பு F ஆதலால், (A_2)-இன் படி

(i)-இன் மெய்மதிப்பு F ஆகும்.

(ii)-இல் இரண்டு தனிக்கூற்றுகளும் மெய்மதிப்பு T பெற்றிருப்பதால் (A_1)-இன் படி (ii)-இன் மெய்மதிப்பு T ஆகும்.

(iii) மற்றும் (iv)-ன் மெய்மதிப்புகள் F ஆகும்.

பிரிப்பிணைவு :

இரண்டு தனிக்கூற்றுகள் p மற்றும் q-ஐ 'அல்லது'(or) என்ற வார்த்தையால் இணைத்தலால் பெறப்படும் கூட்டுக்கூற்று 'p அல்லது q' ஆனது p, q-இன் பிரிப்பிணைவு எனப்படும். இதனை $p \vee q$ எனக் குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர்.

***எடுத்துக்காட்டு* 4 :** *பின்வரும் கூற்றுகளின் பிரிப்பிணைவினை அமைக்க* :

p : *ஜான் கிரிக்கெட் விளையாடுகிறான்.*

q : *வகுப்பறையில் முப்பது மாணவர்கள் உள்ளனர்.*

$p \vee q$: *ஜான் கிரிக்கெட் விளையாடுகிறான் அல்லது வகுப்பறையில் முப்பது மாணவர்கள் உள்ளனர்.*

***எடுத்துக்காட்டு* 5:** *பின்வரும் கூற்றுகளை குறியீட்டு அமைப்புக்கு மாற்றுக :*

"5 *ஒரு மிகை முழு எண் அல்லது ஒரு சதுரம் செவ்வகமாகும்*".

p : 5 *ஒரு மிகை முழு எண்*.

q : *ஒரு சதுரம் செவ்வகம், என்க*.

தரப்பட்ட கூற்றின் குறியீட்டு அமைப்பு $p \vee q$ *ஆகும்.*

***விதி* :** (A_3) p *மற்றும்* q *ஆகிய இரண்டுமே மெய்மதிப்பு* F *பெற்றிருப்பின்* $p \vee q$*-இன் மெய்மதிப்பும்* F *ஆகும்.*

(A_4) p *அல்லது* q *அல்லது இரண்டுமே மெய்மதிப்பு* T *பெற்றிருப்பின்* $p \vee q$*-இன் மெய்மதிப்பும்* T *ஆகும்.*

***எடுத்துக்காட்டு* 6 :**

(i) *சென்னை இந்தியாவில் உள்ளது அல்லது* $\sqrt{2}$ *ஒரு முழு எண்.*

(ii) *சென்னை இந்தியாவில் உள்ளது அல்லது* $\sqrt{2}$ *ஒரு விகிதமுறா எண்.*

(iii) *சென்னை சீனாவில் உள்ளது அல்லது* $\sqrt{2}$ *ஒரு முழு எண்.*

(iv) *சென்னை சீனாவில் உள்ளது அல்லது* $\sqrt{2}$ *ஒரு விகிதமுறா எண்.*

(A_4)*-இன்படி* (i), (ii) *மற்றும்* (iv)*-இன் மெய்மதிப்புகள்* T *ஆகும்.* (A_3)*-இன்படி* (iii)*-இன் மெய்மதிப்பு* F *ஆகும்.*

***மறுப்பு* :**

ஒரு கூற்றின் மறுப்பை அடைவதற்கு அக்கூற்றில் 'அல்ல' என்ற வார்த்தையை தகுந்த இடத்தில் பயன்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். 'அப்படியிருக்க முடியாது' அல்லது 'அது தவறானதொன்று' என்பதை கூற்றிற்கு முன்போ, பின்போ சேர்த்தும் 'மறுப்பு' கூற்றை அடையலாம்.

ஒரு கூற்றை p *குறிக்குமாயின் அதன் மறுப்புக் கூற்றை* $\sim p$ *அல்லது* $\neg p$ *எனக் குறிப்பிடுவர். நாம்* $\sim p$ *என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவோம்.*

***விதி* :** (A_5) p*-இன் மெய்மதிப்பு* T *எனில்,* $\sim p$*-இன் மெய்மதிப்பு* F. *மேலும்* p*-இன் மெய்மதிப்பு* F *எனில்,* $\sim p$*-இன் மெய்மதிப்பு* T.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

p : எல்லா மனிதர்களும் அறிவாளிகள்.

$\sim p$: எல்லா மனிதர்களும் அறிவாளிகள் அல்லர். (அல்லது)

$\sim p$: எல்லா மனிதர்களும் அறிவாளிகளாய் இருக்க முடியாது (அல்லது)

$\sim p$: எல்லா மனிதர்களும் அறிவாளிகள் என்பது தவறு.

குறிப்பு : மறுப்பு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கூற்றுகளை ஒன்று சேர்க்காத போதிலும் அதுவும் ஒரு இணைப்பாகவே அழைக்கப்படும். அது ஒரு கூற்றினை மாற்றி அமைத்தலை மட்டுமே செய்கிறது.

பயிற்சி 9.1

பின்வருவனவற்றில் கூற்றுகள் எவை, கூற்று அல்லாதவை எவை என்பதனைக் காண்க. உமது விடைக்கு தக்க காரணம் தருக.

(1) எல்லா இயல் எண்களும் முழு எண்கள்.

(2) ஒரு சதுரத்திற்கு ஐந்து பக்கங்கள் உண்டு.

(3) வானத்தின் நிறம் நீலம்.

(4) நீ எவ்வாறு உள்ளாய்?

(5) $7 + 2 < 10$.

(6) விகிதமுறு எண் கணம் முடிவானது.

(7) நீ எவ்வளவு அழகாக இருக்கிறாய்!

(8) உனக்கு வெற்றி கிட்டட்டும்.

(9) எனக்கு ஒரு கோப்பை நீர் கொடு.

(10) 2 மட்டுமே இரட்டை பகா எண்.

பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய்மதிப்பு (T அல்லது F) எழுதுக.

(11) ஒரு சாய் சதுரத்தின் எல்லா பக்கங்களும் சம நீளம் கொண்டவை.

(12) $1 + \sqrt{8}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

(13) பாலின் நிறம் வெண்மை.

(14) 30 என்ற எண்ணின் பகா எண் காரணிகள் நான்கு.

(15) பாரீஸ் ஆனது பிரான்சில் உள்ளது.

(16) $\text{Sin}\, x$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு.

(17) ஒவ்வொரு சதுர அணியும் பூச்சியமற்ற அணிக்கோவை அணி.

(18) ஜுபிடர் ஒரு கிரகமாகும்.

(19) ஒரு கலப்பெண் மற்றும் அதன் இணை எண்ணின் பெருக்கற்பலன் ஒரு கற்பனை எண்.

(20) இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் யாவும் சமபக்க முக்கோணங்கள்.

(21) இணையல் மற்றும் பிரிப்பு இணைவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) p : ஆனந்த் பத்திரிகை படிக்கிறான்,
q : ஆனந்த் கிரிக்கெட் விளையாடுகிறான்.

(ii) p : எனக்கு டீ பிடிக்கும்
q : எனக்கு ஐஸ் கிரீம் பிடிக்கும்.

(22) p என்பது "கமலா பள்ளிக்குச் செல்கிறாள்" q என்பது "வகுப்பில் இருபது மாணவர்கள் உள்ளனர்". பின்வரும் கூற்றுகளுக்குரிய வார்த்தைகளுடன் கூடிய வாக்கியங்களை அமைக்க.

(i) $p \vee q$ (ii) $p \wedge q$ (iii) $\sim p$ (iv) $\sim q$ (v) $\sim p \vee q$

(23) பின்வரும் ஒவ்வொரு கூட்டுக்கூற்றையும் குறியீட்டு அமைப்பில் மொழிபெயர்க்க.

(i) ரோஜா சிகப்பு நிறமானது மற்றும் கிளி ஒரு பறவை.

(ii) சுரேஷ் 'இந்தியன் எக்ஸ்பிரஸ்' அல்லது 'தி ஹிண்டு' படிக்கிறான்.

(iii) மாம்பழங்கள் இனிமையாயுள்ளன என்பது தவறு.

(iv) $3 + 2 = 5$ மற்றும் கங்கை ஒரு ஆறு.

(v) வானம் நீலம் அல்ல என்பது தவறு.

(24) p என்கிற கூற்று "சீதாவுக்கு படிப்பது பிடிக்கும்" மற்றும் q என்கிற கூற்று "சீதாவுக்கு விளையாடுவது பிடிக்கும்" எனில் $\sim p \wedge \sim q$ என்பது எதனைக் குறிக்கும்?

(25) பின்வரும் ஒவ்வொன்றுக்கும் மறுப்பை எழுதுக :

(i) $\sqrt{5}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

(ii) மணி ஒழுங்கானவர் மற்றும் கடுமையாக உழைப்பவர்.

(iii) இப்படம் நன்றாக அல்லது அழகாக உள்ளது.

9.1.2. மெய் அட்டவணை (Truth table) :

கூட்டுக் கூற்று மற்றும் உள் கூற்றுகளுக்கு இடையேயான தொடர்பினை வெளிப்படுத்தும் அட்டவணையை மெய் அட்டவணை என்பர். இது நிரைகளையும் நிரல்களையும் பெற்றிருக்கும். உள் கூற்றுகளின் மெய்மதிப்புகள் ஆரம்ப நிரல்களில் இடம்பெறும். அவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு காணப்பெற்ற கூட்டுக்கூற்றுகளின் மெய்மதிப்புகள் கடைசி நிரலில் இடம்பெறும். ஒரு கூட்டுக் கூற்றில் n உள்கூற்றுகள் இடம்பெறின், மெய் அட்டவணையானது 2^n நிரைகள் கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.1 : $\sim p$க்கு மெய் அட்டவணை அமைக்க.

தீர்வு : $\sim p$ என்ற கூற்றில் ஒரு ஒரு தனிக்கூற்று p மட்டும் உள்ளது. எனவே அதற்குரிய மெய் அட்டவணையில் $2^1 (= 2)$ நிரைகள் இருக்கும்.

மேலும் p-இன் மெய் மதிப்பு T எனில் $\sim p$-இன் மெய்மதிப்பு F மற்றும் p-இன் மெய்மதிப்பு F எனில், $\sim p$-இன் மெய்மதிப்பு T என்பதை அறிவோம். இவ்வாறாக $\sim p$-இன் மெய் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

***~ p*க்குரிய மெய் அட்டவணை**

p	$\sim p$
T	F
F	T

எடுத்துக்காட்டு 9.2 : $p \vee (\sim p)$-க்குரிய மெய் அட்டவணையை அமைக்க.

தீர்வு : $p \vee (\sim p)$ என்கிற கூட்டுக்கூற்றில் ஒரே ஒரு தனிக்கூற்று இடம் பெற்றுள்ளது. எனவே அதன் மெய் அட்டவணையில் $2^1(= 2)$ நிரைகள் இருக்கும்.

முதல் நிரலில் p-இன் எல்லா மெய்மதிப்புகளையும் நிரப்புக.

இரண்டாம் நிரலில் p -இன் மெய்மதிப்புகளுக்கு ஏற்ப $\sim p$இன் மெய்மதிப்புகளை நிரப்புக. கடைசி நிரலில், (A_4) –ஐப் பயன்படுத்தி $p\vee (\sim p)$ –இன் மெய்மதிப்புகளை நிரப்புக.

***p∨(~p)*-இன் மெய் அட்டவணை**

p	$\sim p$	$p\vee(\sim p)$
T	F	T
F	T	T

எடுத்துக்காட்டு 9.3 : $p \wedge q$-இன் மெய் அட்டவணையை அமைக்க.

தீர்வு : $p \wedge q$ என்கிற கூட்டுக்கூற்று இரண்டு தனிக்கூற்றுகளைப் பெற்றுள்ளது. அவை p மற்றும் q ஆகும். எனவே, $p \wedge q$-இன் மெய் அட்டவணையில் $2^2(= 4)$ நிரைகள் இருக்கும். முதல் இரண்டு நிரல்களில் p மற்றும் q-இன் எல்லா சாத்திய மெய்மதிப்புகளான TT, TF, FT மற்றும் FF ஆகியவற்றை நிரப்புக.

(A_1) மற்றும் (A_2)-ஐ பயன்படுத்தி $p \wedge q$-இன் மெய்மதிப்புகளை முதல் இரு நிரல்களின் மெய்மதிப்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு, கடைசி நிரலில் நிரப்புக.

***p ∧ q*-இன் மெய் அட்டவணை**

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

குறிப்பு : இதே போல் (A_3) மற்றும் (A_4)ஐ பயன்படுத்தி $p \vee q$-இன் மெய் அட்டவணையைப் பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

***$p \vee q$*-இன் மெய் அட்டவணை**

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

எடுத்துக்காட்டு 9.4 :

பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய் அட்டவணைகளை அமைக்க :

(i) $((\sim p) \vee (\sim q))$ (ii) $\sim ((\sim p) \wedge q)$

(iii) $(p \vee q) \wedge (\sim q)$ (iv) $\sim ((\sim p) \wedge (\sim q))$

தீர்வு :

(i) **$((\sim p) \vee (\sim q))$-க்குரிய மெய் அட்டவணை**

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$((\sim p) \vee (\sim q))$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

(ii) **$\sim ((\sim p) \wedge q)$-க்குரிய மெய் அட்டவணை**

p	q	$\sim p$	$(\sim p) \wedge q$	$\sim ((\sim p) \wedge q)$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

(iii) **$(p \vee q) \wedge (\sim q)$-க்குரிய மெய் அட்டவணை**

p	q	$p \vee q$	$\sim q$	$(p \vee q) \wedge (\sim q)$
T	T	T	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

(iv) $\sim ((\sim p) \wedge (\sim q))$**-க்குரிய மெய் அட்டவணை**

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim ((\sim p) \wedge (\sim q))$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F

எடுத்துக்காட்டு 9.5 : $(p \wedge q) \vee (\sim r)$-க்குரிய மெய் அட்டவணையை அமைக்க.

தீர்வு : $(p \wedge q) \vee (\sim r)$ என்ற கூட்டுக்கூற்றில் மூன்று தனிக்கூற்றுகள் p, q, r உள்ளன. எனவே $(p \wedge q) \vee (\sim r)$-இன் மெய் அட்டவணையில் $2^3 (= 8)$ நிரைகள் இருக்கும். p-இன் மெய் மதிப்பு நான்கு அடுத்தடுத்த ஒதுக்கீடுகளுக்கு T அல்லது Fஆக இருக்கும். qஇன் மெய் மதிப்பு இரண்டு அடுத்தடுத்த ஒதுக்கீடுகளுக்கு T அல்லது F-ஆக இருக்கும். r-இன் மெய் மதிப்பு ஒரு ஒதுக்கீட்டிற்கு T அல்லது Fஆக இருக்கும்.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim r$	$(p \wedge q) \vee (\sim r)$
T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T

எடுத்துக்காட்டு 9.6 : $(p \vee q) \wedge r$-இன் மெய் அட்டவணையை அமைக்க.

தீர்வு :

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

பயிற்சி 9.2

பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய் அட்டவணைகள் அமைக்க :

(1) $p \vee (\sim q)$ (2) $(\sim p) \wedge (\sim q)$

(3) $\sim (p \vee q)$ (4) $(p \vee q) \vee (\sim p)$

(5) $(p \wedge q) \vee (\sim q)$ (6) $\sim (p \vee (\sim q))$

(7) $(p \wedge q) \vee [\sim (p \wedge q)]$ (8) $(p \wedge q) \wedge (\sim q)$

(9) $(p \vee q) \vee r$ (10) $(p \wedge q) \vee r$

தர்க்க சமானத்தன்மை (Logical equivalence) :

A மற்றும் B என்கிற இரண்டு கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய் அட்டவணைகளின் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரியான மெய் மதிப்புகளைப் பெற்றிருப்பின் அவை தர்க்க சமானமானவை எனப்படும். இதனை $A \equiv B$ என எழுதுவர்.

எடுத்துக்காட்டு 9.7 : $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$\sim (p \vee q)$-இன் மெய் அட்டவணை

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

$((\sim p) \wedge (\sim q))$-இன் மெய் அட்டவணை

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$((\sim p) \wedge (\sim q))$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரியானவை. $\therefore \sim (p \vee q) \equiv ((\sim p) \wedge (\sim q))$

மறுப்பின் மறுப்பு (Negation of a negation) :

ஒரு கூற்றின் மறுப்பின் மறுப்பு அக்கூற்றேயாகும். இதனையே

$\sim (\sim p) \equiv p$ என எழுதுவர்.

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
T	F	T
F	T	F

மெய் அட்டவணையில் p மற்றும் $\sim (\sim p)$-க்குரிய நிரல்கள் ஒரே மாதிரியுள்ளதால் p-ம் $\sim (\sim p)$-ம் தர்க்க சமானமானவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.8 : *'வானத்தின் நிறம் நீலம்' என்ற கூற்றிற்கு* $\sim(\sim p) \equiv p$ *என்பதனைச் சரிபார்க்க.*

தீர்வு :

p : *வானத்தின் நிறம் நீலம்*

$\sim p$: *வானத்தின் நிறம் நீலம் அல்ல*

$\sim(\sim p)$: *வானத்தின் நிறம் நீலம் அல்ல என்பது சரி அல்ல*
வானத்தின் நிறம் நீலம்.

நிபந்தனை மற்றும் இரு-நிபந்தனைக் கூற்றுகள்
(Conditional and biconditional statements) :

கணிதத்தில் நாம் அடிக்கடி "p எனில் q" என்கிற கூற்றுகளைச் சந்திக்கின்றோம். இவை நிபந்தனைக் கூற்றுகள் அல்லது விளைவுகள் எனப்படும். இவற்றை $p \rightarrow q$ எனக் குறிப்பிடுவர். இதனை 'p-இன் விளைவு q' என்று படிக்கலாம். p-இன் மெய்மதிப்பு உண்மையாக இருந்து q-இன் மெய் மதிப்பு தவறாக இருப்பின் $p \rightarrow q$-இன் மெய்மதிப்பு தவறாகும். இதற்கு ஏற்றாற் போல் p-இன் மெய்மதிப்பு தவறாக இருந்து q-இன் மெய்மதிப்பு எதுவாயினும் $p \rightarrow q$-இன் மெய்மதிப்பு உண்மையாகும்.

$p \rightarrow q$-இன் மெய் அட்டவணை

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p மற்றும் q ஏதேனும் இரு கூற்றுகள் என்க. $p \rightarrow q$ மற்றும் $q \rightarrow p$-இன் கூட்டுக் கூற்று இரு நிபந்தனைக் கூற்று என அழைக்கப்படும். இதனை $p \leftrightarrow q$ எனக் குறிப்பிடுவர். இதனை 'p இருந்து மேலும் இருந்தால் மட்டுமே q' என படிப்பர். p மற்றும் q-க்கு ஒரே மாதிரியான மெய் மதிப்புகள் இருந்தால் மட்டுமே $p \leftrightarrow q$-இன் மெய்மதிப்பு உண்மை ஆகும். அவ்வாறில்லையாயின் அது தவறு ஆகும்.

$p \leftrightarrow q$-இன் மெய் அட்டவணை

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

9.1.3. மெய்மைகள் (Tautologies) :

ஒரு கூற்றுக்குரிய மெய் அட்டவணையில் இறுதி நிரல் முழுவதும் T ஆக இருப்பின் அக்கூற்று ஒரு மெய்மையாகும். அத்தகைய கூற்று எல்லாவித தர்க்க வாய்ப்புகளுக்கும் உண்மையையே தரக்கூடியதாகும்..

ஒரு கூற்றுக்குரிய மெய் அட்டவணையில் இறுதி நிரல் முழுவதும் Fஆக இருப்பின் அக்கூற்று ஒரு முரண்பாடாகும் (Contradiction). அத்தகைய கூற்று எல்லாவித தர்க்க வாய்ப்புகளுக்கம் தவறையே தரக்கூடியதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.9 : (i) $p \vee (\sim p)$ ஒரு மெய்மை. (ii) $p \wedge (\sim p)$ ஒரு முரண்பாடு.

தீர்வு :

(i) ***$p \vee (\sim p)$-இன் மெய் அட்டவணை***

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
T	F	T
F	T	T

கடைசி நிரலில் T மட்டுமே உள்ளதால் $p \vee (\sim p)$ ஒரு மெய்மையாகும்.

(ii) ***$p \wedge (\sim p)$-இன் மெய் அட்டவணை***

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
T	F	F
F	T	F

கடைசி நிரலில் F மட்டுமே உள்ளதால், $p \wedge (\sim p)$ ஒரு முரண்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.10 :

(i) $((\sim p) \vee (\sim q)) \vee p$ ஒரு மெய்மை எனக் காட்டுக.

(ii) $((\sim q) \wedge p) \wedge q$ ஒரு முரண்பாடு எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

(i) ***$((\sim p) \vee (\sim q)) \vee p$-ன் மெய் அட்டவணை***

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$((\sim p) \vee (\sim q)) \vee p$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

கடைசி நிரல் முழுவதும் T ஆதலால் $((\sim p) \vee (\sim q)) \vee p$ ஒரு மெய்மையாகும்.

(ii) **$((\sim q) \wedge p) \wedge q$-இன் மெய் அட்டவணை**

p	q	$\sim q$	$(\sim q) \wedge p$	$((\sim q) \wedge p) \wedge q$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F

கடைசி நிரல் முழுவதும் F ஆதலால் $((\sim q) \wedge p) \wedge q$ ஒரு முரண்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.11 : $((\sim p) \vee q) \vee (p \wedge (\sim q))$ ஒரு மெய்மையா என்பதனை மெய் அட்டவணையைக் கொண்டு தீர்மானிக்க.

தீர்வு :

$((\sim p) \vee q) \vee (p \wedge (\sim q))$-இன் மெய் அட்டவணை

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee q$	$p \wedge (\sim q)$	$((\sim p) \vee q) \vee (p \wedge (\sim q)$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

கடைசி நிரல் முழுவதும் T ஆதலால் தரப்பட்ட கூற்று ஒரு மெய்மையாகும்.

பயிற்சி 9.3

(1) பின்வரும் கூற்றுகளில் எவை மெய்மைகள் மற்றும் எவை முரண்பாடுகள் என்பதனை மெய் அட்டவணையைக் கொண்டு தீர்மானிக்க.

(i) $((\sim p) \wedge q) \wedge p$

(ii) $(p \vee q) \vee (\sim (p \vee q))$

(iii) $(p \wedge (\sim q)) \vee ((\sim p) \vee q)$

(iv) $q \vee (p \vee (\sim q))$

(v) $(p \wedge (\sim p)) \wedge ((\sim q) \wedge p)$

(2) $p \to q \equiv (\sim p) \vee q$ எனக் காட்டுக.

(3) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ எனக் காட்டுக.

(4) $p \leftrightarrow q \equiv ((\sim p) \vee q) \wedge ((\sim q) \vee p)$ எனக் காட்டுக.

(5) $\sim(p \wedge q) \equiv ((\sim p) \vee (\sim q))$ எனக் காட்டுக.

(6) $p \to q$ மற்றும் $q \to p$ சமானமற்றவை எனக் காட்டுக.

(7) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ என்பது ஒரு மெய்மை எனக் காட்டுக.

9.2 குலங்கள் (Groups) :

9.2.1. ஈருறுப்புச் செயலி (Binary operation) :

இரண்டு இயல் எண்களின் கூடுதல் ஒரு இயல் எண் என்றும் அவற்றின் பெருக்கலும் ஒரு இயல் எண் என்றும் அறிவோம். இச்செயல் ஒவ்வொன்றும் இரண்டு எண்களுடன், மூன்றாவது எண் ஒன்றை தொடர்பு படுத்துவதைக் காண்கின்றோம். இப்புதிய எண் அவ்விரு எண்களின் கூடுதலாகவோ அல்லது பெருக்கலாகவோ உள்ளது. எண் தொகுப்புகளின் வழக்கமாக வரையறுக்கப்படும் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் ஆகிய செய்முறைகளின் பொதுமையாக விளங்குகிற செயல்முறைகளான ஈருறுப்புச் செயலிகளைப்பற்றி இங்கு நாம் காண்போம்.

வரையறை :

S *என்பது வெற்றற்ற கணம் என்க.* S*-இன் மீது வரையறுக்கப்படும்* $*$ *என்ற ஈருறுப்புச் செயலானது* S*-இல் உள்ள உறுப்புகளின் ஒவ்வொரு வரிசையிட்ட சோடி* (a, b)*-யுடனும்* S*-இல்* $a * b$ *என்ற உறுப்பை தொடர்புபடுத்தும் ஒரு விதியாகும். இதனை ஒரு சார்பாகவும் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.*

$* : S \times S \to S$ i.e., $(a, b) \to a * b$.

இங்கு $a * b$ *ஆனது* $*$*இன் கீழ்* (a, b)*-இன் பிம்பமாகும்.*

மேற்கண்ட வரையறையிலிருந்து S*-இன் மீது* $*$ *ஒரு ஈருறுப்புச் செயலாயின்,* $a, b \in S \Rightarrow a * b \in S$.

இந்நிலையில் S *ஆனது* $*$*-இன் கீழ் அடைவு பெற்றுள்ளது எனப்படும். இப்பண்பு "அடைப்பு விதி" அல்லது "அடைப்பு பண்பு" எனப்படும்.*

இத்தலைப்பில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள குறியீடுகளின் பட்டியல் :

N	-	*இயல் எண்களின் கணம்.*
Z	-	*முழு எண்களின் கணம்*
W	-	*குறையற்ற முழு எண்களின் கணம்*
E	-	*இரட்டைப்படை எண்களின் கணம்*
O	-	*ஒற்றைப்படை எண்களின் கணம்*
Q	-	*விகிதமுறு எண்களின் கணம்*
R	-	*மெய்யெண்களின் கணம்*
C	-	*கலப்பெண்களின் கணம்*
$Q - \{0\}$	-	*பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண்களின் கணம்*
$R - \{0\}$	-	*பூச்சியமற்ற மெய்யெண்களின் கணம்*
$C - \{0\}$	-	*பூச்சியமற்ற கலப்பெண்களின் கணம்*
$\forall$	-	*ஒவ்வொரு*
$\exists$	-	*அங்கே கிடைக்கப்பெறும்*
$\ni$	-	*எனுமாறு*

விளக்க எடுத்துக்காட்டு :

வழக்கமான கூட்டல் +ஆனது N-இன் மீது ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் ஆகும்.

ஏனெனில் $a, b \in N \Rightarrow a + b \in N$. i.e., N *ஆனது +இன் கீழ் அடைவு பெற்றுள்ளது.*

ஆனால் வழக்கமான கழித்தல் ஆனது N-இன் மீது ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் ஆகாது. ஏனெனில் $2, 5 \in N$, *ஆனால்* $2 - 5 = -3 \notin N$.

$\therefore$ N *ஆனது கழித்தலின் கீழ் அடைவு பெறவில்லை.*

அதே சமயத்தில் − ஆனது Z-இன் மீது ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் என்பது தெளிவு, ஒரு செயலி ஈருறுப்புச் செயலியாக இருப்பதோ அல்லது இல்லாமலிருப்பதோ, அது வரையறுக்கப்படும் கணத்தைப் பொறுத்ததாகும். பின்வரும் பட்டியல், எண் தொகுப்பில் எவையெல்லாம் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல், முறையே $+, -, \cdot, \div$*இன் கீழ் அடைவு பெற்றுள்ளன என்பதைக் காட்டுகிறது.*

Number Systems / Operations	*N*	*Z*	*Q*	*R*	C	*Q* – {0}	*R* – {0}	*C* – {0}
+	binary	binary	binary	binary	binary	not binary	not binary	not binary
–	not binary	binary	binary	binary	binary	not binary	not binary	not binary
.	binary	binary	binary	binary	binary	binary	binary	binary
÷	not binary	not binary	not binary	not binary	not binary	binary	binary	binary

*எண் தொகுப்புகளின் மீது, சாதாரண இயற்கணிதச் செயலிகள் மட்டுமின்றி, சில புதிய செயலிகளையும் வரையறுக்க முடியும். எடுத்துக்காட்டாக, N-இன் மீது * என்ற செயலியை* $a * b = a^b$ *என வரையறுப்போம்.*

$a, b \in N \Rightarrow a * b = a^b \in N$ $\therefore$ * *ஆனது N-இன் மீது ஒரு ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும்.*

ஈருறுப்புச் செயலிகளுக்குரிய கூடுதல் விவரங்கள் :

(1) $S = R$ *அல்லது R-இன் உட்கணம் என்க. S-இன் மீது *-ஐ பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.*

(i) $a * b = \{a, b\}$-இல் சிறியது

(ii) $a * b = \{a, b\}$-இல் பெரியது

(iii) $a * b = a$

(iv) $a * b = b$

மேற்கண்ட செயலிகள் யாவும் ஈருறுப்புச் செயலிகள் ஆகும்.

(2) $(N, *)$, $a * b = ab + 5$; ab-ம் 5-ம் இயல் எண்கள். $\therefore$ $ab + 5$-ம் ஒரு இயல் எண். எனவே *-ஆனது N-இன் மீது ஈருறுப்புச் செயலியாகும். ஆனால், $a * b = ab - 5$ எனுமாறு வரையறுக்கப்பட்டால், * ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் ஆகாது. $\because 2 * 1 = (2)(1) - 5 = -3 \notin N$.

(3) $(Z, *)$, $a * b = a^b$ என்க. *ஆனது Z-இன் மீது ஒரு ஈருறுப்புச் செயலி அல்ல. $\therefore a = 2, b = -1$ எனில் $a^b = 2^{-1} = \frac{1}{2} \notin Z$.

$R - \{0\}$-லும் இது ஒரு ஈருறுப்புச் செயலி அல்ல என்பதனைக் காணலாம். $\because a = -1, b = \frac{1}{2}$ $\quad a^b = (-1)^{1/2} \notin R - \{0\}$

(4) $(R, *)$; $a * b = a + b + ab$. * ஒரு ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும். $\because a + b$ மற்றும் ab மெய்யெண்கள். அவற்றின் கூடுதலும் ஒரு மெய்யெண்.

(5) (O, +) ; + ஆனது ஒற்றைப்படை எண் கணத்தின் மீது ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் அல்ல. ஏனெனில் இரண்டு ஒற்றை எண்களின் கூடுதல் ஒரு ஒற்றை எண் அல்ல.

(6) (O, .) ; . ஆனது ஒற்றைப்படை எண் கணத்தின் மீது ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் ஆகும். ஏனெனில் இரண்டு ஒற்றை எண்களின் பெருக்கல் ஒரு ஒற்றை எண் ஆகும்.

(7) அணிக்கூட்டல் ஆனது, $m \times n$ வரிசை அணிகளின் கணத்தின் மீது ஒரு ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும். ஏனெனில், இரண்டு $m \times n$ அணிகளின் கூடுதலும் ஒரு $m \times n$ அணியாகும்.

(8) $n \times n$ வரிசை பூச்சியக் கோவை அணிகளின் கணம் மற்றும் $n \times n$ வரிசை பூச்சியமற்றக் கோவை அணிகளின் கணத்தின் மீது அணிகளின் கூட்டல் ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் ஆகாது. ஏனெனில், இரண்டு பூச்சியக் கோவை அணிகளின் கூடுதல் பூச்சியக் கோவை அணியாக இருக்கத் தேவையில்லை. அதே போல் பூச்சியமற்றக் கோவை அணிகளின் கூடுதல் பூச்சியமற்றக் கோவை அணியாக இருக்கத் தேவையில்லை.

(9) அணிப் பெருக்கல் ஆனது பூச்சியக் கோவை அணி கணம் மற்றும் பூச்சியமற்ற கோவை அணிகணத்தின் மீது ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் ஆகும்.

(10) வெக்டர்களின் கணத்தின் மீது வெக்டர் பெருக்கலானது ஈருறுப்புச் செயல் ஆகும். ஆனால் அக்கணத்தின் மீது திசையிலிப் பெருக்கல் ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் ஆகாது.

ஒரு ஈருறுப்புச் செயலிக்குரிய பெருக்கல் அட்டவணை
(Multiplication table for a binary operation) :

$S = \{a_1, a_2 \ldots a_n\}$ என்பது ஒரு முடிவான கணம் என்க. S-இன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட எந்த ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் $*$-ஐயும் ஒரு பெருக்கல் அட்டவணையைக் கொண்டு விளக்கலாம். இந்த அட்டவணையில் 'n' நிரைகள் மற்றும் 'n' நிரல்கள் இருக்கும். S-இன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு நிரையின் ஆரம்பத்திலும், ஒரு நிரலின் ஆரம்பத்திலும் வைத்திடுக. இங்கு நிரைகளில் பின்பற்றப்படும் வரிசையிலேயே நிரல்களிலும் S-இன் உறுப்புகளை எழுதிடுவது வழக்கம். பட்டியலின் இடப்புற மேல் மூலையில் செயலி $*$-ஐ வைத்திடுக. i-வது நிரைக்கும் j-வது நிரலுக்கும் பொதுவான பகுதியில் $a_i * a_j$-ஐ நிரப்புவதன் மூலம் பட்டியலில் உள்ள $n \times n = n^2$ வெற்றிடங்களையும் நிரப்பி விடுக.

$*$	a_1	a_2	....	a_j	...
a_1					
. . . .					
a_i				$a_i * a_j$	
. . .					

*இந்த அட்டவணையை **கேய்லியின் (Cayley's) அட்டவணை** அல்லது பெருக்கல் அட்டவணை என்பர். அடுத்த பிரிவில் முடிவான குலங்களை எவ்வாறு பெருக்கல் அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்தி தெளிவாக விளக்க முடியும் என்பதைப் பற்றி பார்ப்போம்.*

9.2.2. குலங்கள் :

ஒரு வெற்றற்ற கணம் S தரப்பட்டால், அதன் ஏதேனுமிரு உறுப்புகளை ஒன்று சேர்த்து S-இன் மற்றொரு உறுப்பை அடைகிற பண்பானது Sக்கு ஒரு இயற்கணிதத் தொகுப்பு அமைப்பினைத் தருகிறது. ஒரு வெற்றற்ற கணமும், ஒரு ஈருறுப்புச் செயலும் சேர்ந்து அமைக்கும் அமைப்பு இயற்கணிதத் தொகுப்பு ஆகும். எல்லா இயற்கணிதத் தொகுப்புகளில் மிகவும் எளிமையானது குலமாகும். குலங்களைப் பற்றிய ஆய்வானது 19ஆம் நூற்றாண்டில் ஆரம்பிக்கப்பட்டது. சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்பதற்கு சாதகமாக குலக்கொள்கை அமைந்தது. குலக் கொள்கையானது கணிதத்தில் மட்டுமின்றி, இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல் ஆகிய பிரிவுகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

வரையறை :

G ஒரு வெற்றற்ற கணம் என்க. * ஒரு ஈருறுப்புச் செயலி. $(G, *)$ஆனது குலமாகயிருக்க பின்வரும் நிபந்தனைகள் உண்மையாக வேண்டும்.

(1) ***அடைப்பு விதி*** (Closure axiom) : $a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$

(2) ***சேர்ப்பு விதி*** (Associative axiom) : $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$

(3) ***சமனி விதி*** (Identity axiom) : $e \in G$-ஐ $a * e = e * a = a, \forall a \in G$ எனுமாறு காணலாம்.

(4) ***எதிர்மறை விதி*** (Inverse axiom) : ஒவ்வொரு $a \in G$-க்கும், $a^{-1} \in G$-ஐ $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$ எனுமாறு காணமுடியும்.

e ஆனது G-இன் சமனி உறுப்பு எனப்படும். a^{-1}ஆனது a-இன் எதிர்மறை எனப்படும்.

வரையறை (*பரிமாற்றுப் பண்பு*) (Commutative axiom) :

S-இன் மீதான ஈருறுப்புச் செயல் * ஆனது பரிமாற்று தன்மையுடைய தாயின் ஒவ்வொரு $a, b \in S$-க்கும் $a * b = b * a$ என்பது உண்மையாக வேண்டும்.

வரையறை : பரிமாற்றுப் பண்பைப் பூர்த்தி செய்யும் குலம் எபீலியன் குலம் (abelian group) அல்லது பரிமாற்றுக் குலம் எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையாயின் அது எபீலியன் அல்லாத குலமாகும் (non-abelian group).

குறிப்பு (1) : * ஈருறுப்புச் செயலியாயின், அடைப்பு விதி தானாகவே உண்மையாவதைக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு (2) : G என்ற ஒரே குறியீட்டை குலத்தைக் குறிப்பிடுவதற்கும், குலத்திற்குரிய கணத்தைக் குறிப்பிடுவதற்கும் பயன்படுத்துவோம்.

ஒரு குலத்தின் வரிசை (Order of a group) :

ஒரு குலத்தின் வரிசை என்பது அக்குலத்திற்குரிய கணத்தில் உள்ள வெவ்வேறான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையாகும்.

ஒரு குலமானது முடிவான எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைப் பெற்றிருப்பின் முடிவான குலம் (finite group) என்றும், முடிவற்ற எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகள் இருப்பின் முடிவற்ற குலம் (infinite group) என்றும் அழைக்கப்படும். ஒரு குலம் G-இன் வரிசையை $o(G)$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

வரையறை :

S-வெற்றற்ற கணம் மற்றும் * ஈருறுப்புச் செயலி என்க. $(S, *)$ என்பது ஒரு அரைக்குலமாயின் (semi group) பின்வரும் நிபந்தனைகள் உண்மையாக வேண்டும்.

(1) ***அடைப்பு விதி*** : $a, b \in S \Rightarrow a * b \in S$

(2) ***சேர்ப்பு விதி*** : $(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c \in S.$

வரையறை :

*M-வெற்றற்ற கணம் மற்றும் * ஈருறுப்புச் செயலி என்க.* $(M, *)$ *என்பது சமனியுடைய அரைக்குலமாயின்* (monoid) *பின்வரும் நிபந்தனைகள் உண்மையாக வேண்டும்.*

(1) ***அடைப்பு விதி*** : $a, b \in M \Rightarrow a * b \in M$

(2) ***சேர்ப்பு விதி*** : $(a * b) * c = a * (b * c)\ \forall a, b, c \in M$

(3) ***சமனி விதி*** : $e \in M$-*ஐ ஒவ்வொரு* $a \in M$*க்கும்* $a * e = e * a = a$ *எனுமாறு காண முடிதல் வேண்டும்.*

எடுத்துக்காட்டு : $(N, +)$ *ஒரு அரைக்குலம். ஆனால் சமனியுடைய அரைக்குலம் அல்ல, ஏனெனில் சமனியுறுப்பு* $O \notin N.$

எடுத்துக்காட்டு : $a * b = a^b$ *எனுமாறு வரையறுக்கப்பட்ட *க்கு* $(N, *)$*ஆனது ஒரு அரைக்குலம் அல்ல. ஏனெனில்,*

$$(2 * 3) * 4 = 2^3 * 4 = 8^4 = 2^{12} \text{ மற்றும்}$$

$$2 * (3 * 4) = 2 * 3^4 = 2 * 81 = 2^{81}$$

$\therefore\ (2 * 3) * 4 \neq 2 * (3 * 4)$ $\therefore$*சேர்ப்பு விதி உண்மையாகவில்லை.*

எடுத்துக்காட்டு : $(Z, .)$ *ஒரு சமனியுடைய அரைக்குலம் ஆகும். ஆனால் இது குலம் அல்ல. ஏனெனில்,* $(5 \in Z,\ \frac{1}{5} \notin Z).$

$(Z, +)$ *மற்றும்* $(Z, .)$ *ஆகிய இரண்டும் அரைக்குலங்கள் மற்றும் சமனியுடைய அரைக்குலங்கள். வரையறைகளிலிருந்து ஒவ்வொரு குலமும் சமனியுடைய அரைக்குலம் என்பது தெளிவு.*

எடுத்துக்காட்டு 9.12 : $(Z, +)$ *ஒரு முடிவற்ற எபீலியன் குலம் என நிறுவுக.*

தீர்வு :

(i) ***அடைப்பு விதி*** : *இரண்டு முழு எண்களின் கூடுதலும் ஒரு முழு எண்.*i.e., $a, b \in Z \Rightarrow a + b \in Z$

(ii) ***சேர்ப்பு விதி*** : Z-*ல் கூட்டல் எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.*
i.e., $\forall a, b, c \in Z,\ (a + b) + c = a + (b + c)$

(iii) ***சமனி விதி*** : *சமனி உறுப்பு* $0 \in Z$ *மற்றும் அது* $0 + a = a + 0 = a,\ \forall\ a \in Z$*ஐ பூர்த்தி செய்கிறது. எனவே சமனி விதி உண்மையாகும்.*

(iv) ***எதிர்மறை விதி*** : ஒவ்வொரு $a \in Z$-க்கும், $-a \in Z$ஐ $-a + a = a + (-a) = 0$ எனுமாறு காணலாம். எனவே எதிர்மறை விதி உண்மையாகும். $\therefore (Z, +)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) $\forall a, b \in Z,\ a + b = b + a$

$\therefore$ கூட்டல் பரிமாற்று விதிக்குட்படும்.

$\therefore (Z, +)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

(vi) Z முடிவற்ற கணம் ஆதலால், $(Z, +)$ ஒரு முடிவற்ற எபீலியன் குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.13 : $(R - \{0\}, .)$ முடிவற்ற எபீலியன் குலம் எனக் காட்டுக. இங்கு '.' என்பது வழக்கமான பெருக்கலைக் குறிக்கும்.

தீர்வு :

(i) ***அடைப்பு விதி*** : இரண்டு பூச்சியமற்ற மெய்யெண்களின் பெருக்கலும் ஒரு பூச்சியமற்ற மெய்யெண் ஆகும்.

i.e., $\forall a, b \in R, a . b \in R.$

(ii) ***சேர்ப்பு விதி*** : $R - \{0\}$-இல் பெருக்கல் எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.

i.e., $a . (b . c) = (a . b) . c \ \ \forall a, b, c \in R - \{0\}$

$\therefore$ சேர்ப்பு விதி உண்மையாகிறது.

(iii) ***சமனி விதி*** : சமனி உறுப்பு $1 \in \mathrm{R} - \{0\}$ மற்றும்

$1 . a = a . 1 = a, \forall a \in R - \{0\}$

$\therefore$ சமனி விதி உண்மையாகிறது.

(iv) ***எதிர்மறை விதி*** : ஒவ்வொரு $a \in R - \{0\}$க்கு $\frac{1}{a} \in R - \{0\}$ஐ $a . \frac{1}{a} = \frac{1}{a} . a = 1$ (சமனி உறுப்பு). $\therefore$ எதிர்மறை விதி உண்மையாகிறது.

$\therefore (R - \{0\}, .)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) $\forall a, b \in R - \{0\}, \quad a . b = b . a$

$\therefore$ பரிமாற்று விதி உண்மையாகிறது. $\therefore (R - \{0\}, .)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

(vi) மேலும் $R - \{0\}$ ஒரு முடிவற்ற கணம் ஆதலால், $(R - \{0\}, .)$ ஒரு முடிவற்ற எபீலியன் குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.14 : 1இன் 3ஆம் படி மூலங்கள் (cube root of unity) ஒரு முடிவான எபீலியன் குலத்தை பெருக்கலின் கீழ் அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $G = \{1, \omega, \omega^2\}$. கேய்லி அட்டவணையானது,

.	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

இந்த அட்டவணையிலிருந்து, நாம் பின்வருவனவற்றை அறிகிறோம்.

(i) அட்டவணையில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும், G-இன் உறுப்புகளாகும். எனவே அடைப்பு விதி உண்மையாகிறது.

(ii) பெருக்கல் எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.

(iii) சமனியுறுப்பு 1. அது சமனி விதியைப் பூர்த்தி செய்யும்.

(iv) 1-இன் எதிர்மறை 1

ω-இன் எதிர்மறை ω^2

ω^2-இன் எதிர்மறை ω

மற்றும் இது எதிர்மறை விதியைப் பூர்த்தி செய்யும்.

$\therefore$ $(G, .)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) பரிமாற்று விதியும் உண்மையாகும்.

$\therefore$ $(G, .)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

(vi) G ஒரு முடிவான கணம் ஆதலால், $(G, .)$ ஒரு முடிவான எபீலியன் குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.15 : 1-இன் 4-ஆம் படி மூலங்கள் (fourth roots of unity) பெருக்கலின் கீழ் எபீலியன் குலத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு : 1-இன் 4ஆம் படி மூலங்கள் $1, i, -1, -i$.

$G = \{1, i, -1, -i\}$. கேய்லி அட்டவணையானது

.	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

இந்த அட்டவணையிலிருந்து, நாம் பின்வருவனவற்றை அறிகிறோம்.

(i) அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

(ii) C-இல் பெருக்கலானது சேர்ப்பு விதிக்குட்படுமாதலால், G-யிலும் அது உண்மையாகும்.

(iii) சமனி உறுப்பு $1 \in G$ மற்றும் அது சமனி விதியைப் பூர்த்தி செய்கிறது.

(iv) 1-இன் எதிர்மறை 1 ; i-இன் எதிர்மறை $-i$; -1-இன் எதிர்மறை -1 ; மற்றும் $-i$-இன் எதிர்மறை i. எதிர்மறை விதியையும் பூர்த்தி ஆகிறது. $\therefore (G, .)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) அட்டவணையிலிருந்து, பரிமாற்று விதியும் உண்மை என்பதை அறியலாம். $\therefore$ $(G, .)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.16 : $(C, +)$ ஆனது ஒரு முடிவற்ற எபீலியன் குலம் என நிறுவுக.

தீர்வு :

(i) ***அடைப்பு விதி :*** இரண்டு கலப்பெண்களின் கூடுதல் எப்பொழுதும் ஒரு கலப்பெண் ஆகும்.

$$\text{i.e., } z_1, z_2 \in C \Rightarrow z_1 + z_2 \in C$$

அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

(ii) ***சேர்ப்பு விதி :*** C-இல் கூட்டலானது எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதியை உண்மையாக்கும்.

i.e., $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \; \forall \; z_1, z_2, z_3 \in C$

$\therefore$ சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும்.

(iii) ***சமனி விதி :***

சமனி உறுப்பு $o = o + io \in C$ மற்றும் $o + z = z + o = z \; \forall \; z \in C$

$\therefore$ சமனி விதி உண்மையாகும்.

(iv) ***எதிர்மறை விதி :*** ஒவ்வொரு $z \in C$-க்கும் $-z \in C$-ஐ

$z + (-z) = -z + z = 0$ எனுமாறு காணலாம். எனவே எதிர்மறை விதி உண்மையாகும். $\therefore$ $(C, +)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) ***பரிமாற்றுப் பண்பு :***

$\forall \; z_1, z_2 \in C, \; z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

எனவே பரிமாற்று விதி உண்மையாகிறது. $\therefore$ $(C, +)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும். C ஒரு முடிவற்ற கணமாதலால், $(C, +)$ ஒரு முடிவற்ற எபீலியன் குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.17 : பூச்சியமற்ற கலப்பெண்களின் கணம், கலப்பெண்களின் வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ் ஒரு எபீலியன் குலம் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

(i) ***அடைப்பு விதி :*** $G = C - \{0\}$ என்க.

பூச்சியமற்ற இரு கலப்பெண்களின் பெருக்கல் எப்போதும் பூச்சியமற்ற கலப்பெண்ணாக இருக்கும்.

$\therefore$ அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

(ii) ***சேர்ப்பு விதி :***

கலப்பெண்களில் பெருக்கல் சேர்ப்பு விதி எப்போதும் உண்மையாகும்.

(iii) ***சமனி விதி* :**

$1 = 1 + io \in G$, 1 சமனி உறுப்பாகும். மேலும் $1.z = z\,.\,1 = z\ \forall\ z \in G$.

$\therefore$ சமனி விதி உண்மை.

(iv) ***எதிர்மறை விதி* :**

$z = x + iy \in G$. இங்கு $z \neq 0$ என்க. x மற்றும் y இரண்டுமே பூச்சியமற்றவை அல்லது ஏதேனும் ஒன்றாவது பூச்சியமற்றது.

$\therefore x^2 + y^2 \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)\,(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \in G$$

மேலும் $z\,.\,\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\,.\,z = 1 \ \therefore z$ ஆனது $\frac{1}{z}$ என்ற எதிர்மறையை G-இல் பெற்றுள்ளது. இவ்வாறாக எதிர்மறை விதி உண்மையாகிறது.

$\therefore (G, .)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) ***பரிமாற்றுப் பண்பு* :**

$$z_1\,z_2 = (a+ib)\,(c+id) = (ac-bd) + i\,(ad+bc)$$
$$= (ca-db) + i\,(da+cb) = z_2\,z_1$$

$\therefore$ பரிமாற்றுப் பண்பையும் அது பூர்த்தி செய்கிறது.

$\therefore$ G-ஆனது கலப்பெண்களின் வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ் ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

***குறிப்பு* :**

0-க்கு பெருக்கலின் கீழ் எதிர்மறை இல்லாததால், இங்கு அது நீக்கப்பட்டு விட்டது. இதே போல், $Q - \{0\}$, $R - \{0\}$ ஆகியவையும் பெருக்கலின் கீழ் எபீலியன் குலங்கள் எனக்காட்டலாம். ஆனால் $Z - \{0\}$ ஆனது பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குலமாகாது.

$\because 7 \in Z - \{0\}$ எனினும் அதன் பெருக்கல் எதிர்மறை $\frac{1}{7} \notin Z - \{0\}$

***குறிப்பு* :** விதிகளைச் சரிபார்க்கையில், வரையறையில் தந்துள்ள வரிசையிலேயே அவற்றை சரிபார்க்க வேண்டும். ஏதேனும் ஒரு விதி உண்மையாகாது போனால் அந்த நிலையிலேயே தரப்பட்ட கணம் குலமாகாது என முடிவு செய்து விடலாம். மேற்கொண்டு விதிகளைச் சரிபார்க்க வேண்டியது அவசியமில்லை.

பின்வரும் பட்டியலானது எந்த எண் தொகுப்புகள் ஒரு குறிப்பிட்ட செயலியின் கீழ் குலத்தை அமைக்கின்றன என்பதைக் காட்டுகிறது.

*	N	E	Z	Q	R	C	$Q - \{0\}$	$R - \{0\}$	$C - \{0\}$
+	அரைக் குலம்	குலம்	குலம்	குலம்	குலம்	குலம்	அடைவு அற்றது	அடைவு அற்றது	அடைவு அற்றது
·	சமனி உடைய அரைக்குலம்	அரைக் குலம்	சமனி உடைய அரைக்குலம்	சமனி உடைய அரைக்குலம்	சமனி உடைய அரைக்குலம்	சமனி உடைய அரைக்குலம்	குலம்	குலம்	குலம்
–	அடைவு அற்றது	சேர்ப்பு அற்றது	சேர்ப்பு அற்றது	சேர்ப்பு அற்றது	சேர்ப்பு அற்றது	சேர்ப்பு அற்றது	அடைவு அற்றது	அடைவு அற்றது	அடைவு அற்றது
÷	அடைவு அற்றது	அடைவு அற்றது	அடைவு அற்றது	அடைவு அற்றது	அடைவு அற்றது	அடைவு அற்றது	சேர்ப்பு அற்றது	சேர்ப்பு அற்றது	சேர்ப்பு அற்றது

எடுத்துக்காட்டு 9.18 : $(Z, *)$ ஒரு முடிவற்ற எபீலியன் குலம் எனக் காட்டுக. இங்கு * ஆனது $a * b = a + b + 2$ எனுமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

தீர்வு : (i) ***அடைப்பு விதி :*** a, b மற்றும் 2 முழு எண்கள் ஆதலால் $a + b + 2$-ம் ஒரு முழு எண். $\therefore a * b \in Z \quad \forall a, b \in Z$

(ii) ***சேர்ப்பு விதி :***

$a, b, c \in G$ என்க.

$$(a * b) * c = (a + b + 2) * c = (a + b + 2) + c + 2 = a + b + c + 4$$

$$a * (b * c) = a * (b + c + 2) = a + (b + c + 2) + 2 = a + b + c + 4$$

$$\Rightarrow \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

$\therefore$ சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும்.

(iii) ***சமனி விதி :***

e சமனி உறுப்பு என்க.

eஇன் வரையறையிலிருந்து $a * e = a$

*இன் வரையறையிலிருந்து $a * e = a + e + 2$

$$\Rightarrow a + e + 2 = a$$

$$\Rightarrow e = -2$$

$-2 \in Z$. $\therefore$ சமனி விதி உண்மையாகும்.

(iv) ***எதிர்மறை விதி :***

$a \in G$ என்க. a -இன் எதிர்மறை a^{-1}எனக் கொண்டால்

a^{-1}-இன் வரையறைப்படி $a * a^{-1} = e = -2$

*-இன் வரையறைப்படி $a * a^{-1} = a + a^{-1} + 2$

$$\Rightarrow a + a^{-1} + 2 = -2$$

$$\Rightarrow a^{-1} = -a - 4 \in Z$$

$\therefore$ எதிர்மறை விதி உண்மையாகும். $\therefore (Z, *)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) ***பரிமாற்றுப் பண்பு :***

$a, b \in G$ என்க.

$a * b = a + b + 2 = b + a + 2 = b * a \quad \therefore *$ பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டது.

$\therefore$ $(Z, *)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும். மேலும், Z ஒரு முடிவற்ற கணமாதலால் இக்குலம் முடிவற்ற எபீலியன் குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.19 : 2×2 வரிசை கொண்ட பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் யாவும் முடிவற்ற எபீலியன் அல்லாத குலத்தை அணி பெருக்கலின் கீழ் அமைக்கும் எனக் காட்டுக. (இங்கு அணியின் உறுப்புகள் யாவும் Rஐச் சேர்ந்தவை)

தீர்வு : G என்பது 2×2 வரிசை கொண்ட பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் யாவும் அடங்கிய கணம் என்க. உறுப்புகள் யாவும் R-ஐச் சேர்ந்தவை.

(i) ***அடைப்பு விதி :*** இரண்டு 2×2 வரிசை கொண்ட பூச்சியமற்ற கோவை அணிகளின் பெருக்கற்பலன் ஒரு 2×2 வரிசை பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும். எனவே அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

i.e., $A, B \in G \Rightarrow AB \in G$.

(ii) ***சேர்ப்பு விதி :*** அணி பெருக்கல் எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும். எனவே சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும். i.e., $A(BC)=(AB)C \ \forall \ A, B, C \in G$.

(iii) ***சமனி விதி :*** சமனி உறுப்பு $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$. இது சமனிப் பண்பை பூர்த்தி செய்கிறது.

(iv) ***எதிர்மறை விதி :*** $A \in G$-இன் எதிர்மறை A^{-1}-ஐ G-இல் காண முடியும். மேலும் அது 2×2 வரிசை கொண்டது. மற்றும் $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. எனவே, எதிர்மறை விதி உண்மையாகும். எனவே, G ஒரு குலமாகும். பொதுவாக அணி பெருக்கல் பரிமாற்று விதிக்குட்படாது. ஆதலால் G ஒரு எபீலியன் அல்லாத குலமாகும். G-இல் எண்ணிக்கையற்ற உறுப்புகள் உள்ளதால், அது முடிவற்ற எபீலியன் அல்லாத குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.20 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ஆகிய நான்கு அணிகளும் அடங்கிய கணம் அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒரு எபீலியன் குலத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ என்க.

$G = \{I, A, B, C\}$ என்க.

இவ்வணிகளை இரண்டு இரண்டாகப் பெருக்கி பெருக்கல் அட்டவணையைப் பின்வருமாறு அமைக்கலாம் :

$\cdot$	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	I	C	B
B	B	C	I	A
C	C	B	A	I

(i) ***அடைப்பு விதி :*** பெருக்கல் அட்டவணையின் எல்லா உறுப்புகளும், G-இன் உறுப்புகள். Gஆனது $\cdot$இன் கீழ் அடைவு பெற்றுள்ளது. எனவே அடைப்பு விதி உண்மை.

(ii) ***சேர்ப்பு விதி :*** அணி பெருக்கல் பொதுவாக சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.

(iii) ***சமனி விதி :*** I-ஐ முன்வைத்து எழுதப்பட்டுள்ள நிரையின் உறுப்புகள் எல்லாவற்றிற்கும் மேலேயுள்ள நிரையுடனும் I-ஐ மேலே வைத்து எழுதப்பட்டுள்ள நிரலில் உள்ள உறுப்புகள் இடப்புற இறுதியில் அமைந்த நிரலுடன் ஒன்றி விடுதலால், I ஆனது சமனி உறுப்பாகும்.

(iv) $I \cdot I = I \Rightarrow$ I-இன் எதிர்மறை I

$A \cdot A = I \Rightarrow$ A-இன் எதிர்மறை A

$B \cdot B = I \Rightarrow$ B-இன் எதிர்மறை B

$C \cdot C = I \Rightarrow$ C-இன் எதிர்மறை C

அட்டவணையிலிருந்து $\cdot$ பரிமாற்று விதிக்குட்படுவது தெளிவு. எனவே G ஆனது அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.21 :

$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$; $x \in R - \{0\}$ என்ற அமைப்பில் உள்ள அணிகள் யாவும் அடங்கிய கணம் G ஆனது அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குலம் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} / x \in R - \{0\} \right\}$ என்க. அணிப்பெருக்கலின் கீழ் G ஒரு குலம் எனக் காட்டுவோம்.

(i) ***அடைப்பு விதி :***

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in G, B = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \in G$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \in G\,,\ (\because x \neq 0,\ y \neq 0 \Rightarrow 2xy \neq 0)$$

i.e., G ஆனது அணிப்பெருக்கலின் கீழ் அடைவு பெற்றுள்ளது.

(ii) அணிப்பெருக்கல் எப்பொழுதுமே சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.

(iii) $E = \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix} \in G$ என்பது $AE = A, \forall A \in G$ என்க.

$$AE = A \Rightarrow \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2xe & 2xe \\ 2xe & 2xe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \Rightarrow 2xe = x \Rightarrow e = \frac{1}{2}\ (\because x \neq 0)$$

எனவே, $E = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in G$ என்பது $AE = A, \forall A \in G$ எனுமாறு உள்ளது

இதே போல் $EA = A, \forall A \in G$ எனக் காட்டலாம்.

$\therefore$ G-இன் சமனி உறுப்பு E ஆகும். எனவே சமனி விதி உண்மையாகும்.

(iv) $A^{-1} = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \in G$ என்பது $A^{-1}A = E$ எனுமாறு உள்ளது என்க.

இவ்வாறாயின் $\begin{bmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2xy = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4x}$

$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4x & 1/4x \\ 1/4x & 1/4x \end{bmatrix} \in G$ என்பது $A^{-1}A = E$ எனுமாறு உள்ளது.

இதே போல் $AA^{-1} = E$ எனக் காட்டலாம். $\therefore$ A-இன் எதிர்மறை A^{-1} ஆகும்.

$\therefore$ அணிப் பெருக்கலின் கீழ் G ஒரு குலமாகும்.

குறிப்பு : $AB = BA$ என்பதால் மேற்கண்ட குலம் எபீலியன் குலமாகும். ஆனால், பொதுவாக அணிப்பெருக்கல் பரிமாற்று விதிக்குட்படுவதில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 9.22 : $G = \{a + b\sqrt{2}\ /\ a, b \in Q\}$ என்பது கூட்டலைப் பொறுத்து ஒரு முடிவற்ற எபீலியன் குலம் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

(i) ***அடைப்பு விதி :***

$x, y \in G$ என்க. $\therefore x = a + b\sqrt{2},\ y = c + d\sqrt{2}\ ;\ a, b, c, d \in Q.$

$x + y = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in G,$

ஏனெனில் $(a + c)$ மற்றும் $(b + d)$ விகிதமுறு எண்கள்.

$\therefore$ கூட்டலைப் பொறுத்து G ஆனது அடைவு பெற்றுள்ளது.

(ii) ***சேர்ப்பு விதி :*** G-இன் உறுப்புகள் மெய்யெண்கள் ஆதலால், கூட்டல் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.

(iii) ***சமனி விதி :***

$0 = 0 + 0\sqrt{2} \in G$ஐ எல்லா $x = a + b\sqrt{2} \in G$க்கும்

$$x + 0 = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(0 + 0\sqrt{2}\right)$$
$$= a + b\sqrt{2} = x$$ எனுமாறு காணலாம்.

இதே போல், $0 + x = x$. $\therefore$ G-இன் சமனி உறுப்பு 0 ஆகும். மேலும் இது சமனி விதியை உண்மையாக்கும்.

(iv) ***எதிர்மறை விதி :***

ஒவ்வொரு $x = a + b\sqrt{2} \in G$-க்கும் $-x = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in G$-ஐ

$$x + (-x) = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left((-a) + (-b)\sqrt{2}\right)$$
$$= \left(a + (-a)\right) + \left(b + (-b)\right)\sqrt{2} = 0$$

இதே போல், $(-x) + x = 0$ எனவும் காட்டலாம்.

$\therefore$ $a + b\sqrt{2}$-இன் எதிர்மறை $(-a) + (-b)\sqrt{2}$ ஆகும். மேலும் இது எதிர்மறை விதியைப் பூர்த்தி செய்யும். $\therefore$ கூட்டலைப் பொறுத்து G ஒரு குலமாகும்.

(v) ***பரிமாற்று விதி :***

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} = (c + a) + (d + b)\sqrt{2}$$
$$= \left(c + d\sqrt{2}\right) + \left(a + b\sqrt{2}\right)$$
$$= y + x, \ \forall x, y \in G.$$

$\therefore$ பரிமாற்று விதி உண்மையாவதைக் காண்கின்றோம்.

$\therefore$ $(G, +)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும். G ஒரு முடிவற்ற கணம் ஆதலால், $(G, +)$ ஆனது ஒரு முடிவற்ற எபீலியன் குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.23 : 1ஐத் தவிர மற்ற எல்லா விகிதமுறு எண்களும் அடங்கிய கணம் G என்க. Gல் $*$ஐ $a * b = a + b - ab, \ \forall a, b \in G$ எனுமாறு வரையறுப்போம். $(G, *)$ ஒரு முடிவற்ற எபீலியன் குலம் எனக்காட்டுக.

தீர்வு : $G = Q - \{1\}$என்க.

$a, b \in G$. a மற்றும் b விகிதமுறு எண்கள். $a \neq 1, \ b \neq 1$.

(i) ***அடைப்பு விதி :*** $a * b = a + b - ab$ ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

$a * b \in G$ எனக்காட்டுவதற்கு $a * b \neq 1$ என நிரூபிக்க வேண்டும். மாறாக, $a * b = 1$ எனக் கொண்டால்,

$$a + b - ab = 1$$
$$\Rightarrow b - ab = 1 - a$$
$$\Rightarrow b(1 - a) = 1 - a$$
$$\Rightarrow b = 1 \quad (\because a \neq 1, \ 1 - a \neq 0)$$

இது சாத்தியமில்லை, ஏனெனில் $b \neq 1$. $\therefore$ நமது தற்கோள் தவறானது ஆகும். $\therefore a * b \neq 1$ எனவே $a * b \in G$.

$\therefore$ அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

(ii) ***சேர்ப்பு விதி :***

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c - bc) \\ &= a + (b + c - bc) - a\,(b + c - bc) \\ &= a + b + c - bc - ab - ac + abc \\ (a * b) * c &= (a + b - ab) * c \\ &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)\,c \\ &= a + b + c - ab - ac - bc + abc \\ \therefore a * (b * c) &= (a * b) * c \;\forall\, a, b, c \in G \end{aligned}$$

$\therefore$ சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும்.

(iii) ***சமனி விதி :*** e என்பது சமனி உறுப்பு என்க.

e-இன் வரையறைப்படி, $a * e = a$

$*$-இன் வரையறைப்படி, $a * e = a + e - ae$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a + e - ae &= a \\ \Rightarrow e(1 - a) &= 0 \\ \Rightarrow e &= 0 \text{ ஏனெனில் } a \neq 1 \\ e &= 0 \in G \end{aligned}$$

$\therefore$ சமனி விதி பூர்த்தியாகிறது.

(iv) ***எதிர்மறை விதி :***

$a \in G$-இன் எதிர்மறை a^{-1} என்க.

எதிர்மறையின் வரையறைப்படி $a * a^{-1} = e = 0$

$*$இன் வரையறைப்படி, $a * a^{-1} = a + a^{-1} - aa^{-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a + a^{-1} - aa^{-1} &= 0 \\ \Rightarrow a^{-1}(1 - a) &= -a \\ \Rightarrow a^{-1} &= \frac{a}{a - 1} \in G \text{ ஏனெனில் } a \neq 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ எதிர்மறை விதி பூர்த்தியாகும் $\therefore (G, *)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) ***பரிமாற்று விதி :***

$a, b \in G$க்கு $\qquad a * b = a + b - ab$

$= b + a - ba$

$= b * a$

$\therefore$ Gஇல் * பரிமாற்று விதிக்குட்படுகிறது. எனவே, $(G, *)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும். G முடிவற்றதாதலால் $(G, *)$ முடிவற்ற எபீலியன் குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.24 : பூச்சியமற்ற கலப்பெண்களின் கணமான $C - \{0\}$இல் வரையறுக்கப்பட்ட $f_1(z) = z, f_2(z) = -z, f_3(z) = \frac{1}{z}, f_4(z) = -\frac{1}{z}\ \forall\ z \in C - \{0\}$ என்ற சார்புகள் யாவும் அடங்கிய கணம் $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ ஆனது சார்புகளின் சேர்ப்பின் கீழ் ஒரு எபீலியன் குலம் அமைக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு : $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ என்க.

$(f_1 \circ f_1)(z) = f_1(f_1(z)) = f_1(z)$

$\therefore f_1 \circ f_1 = f_1$

$f_2 \circ f_1 = f_2,\ f_3 \circ f_1 = f_3,\ f_4 \circ f_1 = f_4$

மேலும் $(f_2 \circ f_2)(z) = f_2(f_2(z)) = f_2(-z) = -(-z) = z = f_1(z)$

$\therefore f_2 \circ f_2 = f_1$

இதேபோல், $f_2 \circ f_3 = f_4,\ f_2 \circ f_4 = f_3$

$(f_3 \circ f_2)(z) = f_3(f_2(z)) = f_3(-z) = -\frac{1}{z} = f_4(z)$

$\therefore f_3 \circ f_2 = f_4$

இதேபோல் $f_3 \circ f_3 = f_1,\ f_3 \circ f_4 = f_2$

$(f_4 \circ f_2)(z) = f_4(f_2(z)) = f_4(-z) = -\frac{1}{-z} = \frac{1}{z} = f_3(z)$

$\therefore f_4 \circ f_2 = f_3$

இதே போல் $f_4 \circ f_3 = f_2,\ f_4 \circ f_4 = f_1$

மேற்கண்டவற்றை பயன்படுத்தி பின்வரும் பெருக்கல் அட்டவணையை அடைகிறோம்:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

பெருக்கல் அட்டவணையிலிருந்து,

(i) அட்டவணையின் எல்லா உறுப்புகளும் G-இன் உறுப்புகளாதலால், அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

(ii) சார்புகளின் சேர்ப்பு பொதுவாக சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.

(iii) G-இன் சமனி உறுப்பு f_1 ஆகும். எனவே, சமனி விதி உண்மையாகிறது.

(iv) f_1-இன் எதிர்மறை f_1 ; f_2-இன் எதிர்மறை f_2

f_3-இன் எதிர்மறை f_3 ; f_4-இன் எதிர்மறை f_4

எதிர்மறை விதி உண்மையாகிறது. (G, o) ஒரு குலமாகும்.

(v) பரிமாற்று விதி உண்மையாவதை அட்டவணையிலிருந்து அறிகிறோம்.

$\therefore$ (G, o) ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

9.2.3. மட்டுச் செயலி (Modulo operation) :

n ஒரு மிகை முழு எண் என்க. "n-இன் மட்டுக்கு கூட்டல்" மற்றும் "n-இன் மட்டுக்கு பெருக்கல்", ஆகிய புதிய இரண்டு செயலிகளை வரையறுப்போம். இச்செயலிகளை வரையறுக்க, "வகுத்தல் கோட்பாடு என்ற கொள்கை தேவைப்படுகிறது".

$a, b \in Z$, $b \neq 0$ என்க. aஐ b-ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் ஈவு q மற்றும் குறையற்ற மீதி r என்க i.e., $a = qb + r$, $0 \leq r < |b|$. இதனை "வகுத்தல் கோட்பாடு" (Division Algorithm) என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $a = 17$, $b = 5$ எனில் $17 = (3 \times 5) + 2$. இங்கு $q = 3$ மற்றும் $r = 2$.

nஇன் மட்டுக்கு கூட்டல் ($+_n$) (Addition modulo n) :

$a, b \in Z$; n ஒரு நிலையான மிகை முழு எண் என்க. $a + b$ஐ nஆல் வகுக்க, கிடைக்கும் மீதி r என்க. n-இன் மட்டுக்கு கூட்டலைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம். $a +_n b = r$; $0 \leq r < n$.

$a = 25$, $b = 8$ மற்றும் $n = 7$, $25 +_7 8 = 5$

($\because$ $25 + 8 = 33 = (4 \times 7) + 5$)

n-இன் மட்டுக்கு பெருக்கல் ($\cdot_n$) (Multiplication modulo n) :

$a \cdot_n b = r$; $0 \leq r < n$, இங்கு r என்பது $a.b$ஐ n-ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதியாகும். எடுத்துக்காட்டாக, $2 \cdot_5 4 = 3$; $7 \cdot_9 8 = 2$

n-இன் மட்டுக்கு சர்வசமத்தன்மை (Congruence modulo n) :

$a, b \in Z$; n ஒரு நிலையான மிகை முழு எண் என்க.

"n-இன் மட்டுக்கு aஆனது bயுடன் சர்வசமம்" ஆக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நியதியாதெனில் $a - b$ஆனது n-ஆல் வகுபடுதலே ஆகும். இதனைக் குறியீட்டின் வாயிலாக,

$a \equiv b$ (n-இன் மட்டு) $\Leftrightarrow$ $(a - b)$ஆனது n-ஆல் வகுபடுதல், என எழுதலாம்.

$15 - 3$ ஆனது 4ஆல் வகுபடுமாதலால், $15 \equiv 3$ (4-இன் மட்டு)

$17 - 4$ஆனது 3ஆல் வகுபடாது ஆதலால் $17 \equiv 4$ (3-இன் மட்டு) என்பது உண்மையாகாது.

n-இன் மட்டுக்கான சர்வ சம தொகுப்புகள் (Congruence classes modulo n) :

$a \in Z$ மற்றும் n ஒரு நிலையான மிகை முழு எண் என்க. n-இன் மட்டுக்கு a-யுடன் சர்வசமத்தன்மையுடைய எல்லா எண்களையும் எடுத்துக் கொள்வோம். இக்கணத்தை $[a]$ எனக் குறிப்பிடுவர். இது nஇன் மட்டுக்கு aஆல் தீர்மானிக்கப்படும் சர்வ சமத்தொகுப்பு எனப்படும்.

இவ்வாறாக, $[a] = \{x \in Z / x \equiv a$ (n-இன் மட்டு)$\}$

$= \{x \in Z / (x - a)$ஆனது n-ஆல் வகுபடும்$\}$

$= \{x \in Z / (x - a)$ஆனது n-இன் மடங்கு$\}$

$= \{x \in Z / (x - a) = kn\}, k \in Z$

$= \{x \in Z / x = a + kn\}, k \in Z$

5இன் மட்டுக்குரிய சர்வசம தொகுப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$[a] = \{x \in Z / x = a + kn\}$$

$$[0] = \{x \in Z / x = 5k, k \in Z\} = \{... -10, -5, 0, 5, 10...\}$$

$$[1] = \{x \in Z / x = 5k + 1, k \in Z\} = \{... -9, -4, 1, 6, 11, ...\}$$

$$[2] = \{x \in Z / x = 5k + 2, k \in Z\} = \{... -8, -3, 2, 7, 12, ...\}$$

$$[3] = \{x \in Z / x = 5k + 3, k \in Z\} = \{... -7, -2, 3, 8, 13, ...\}$$

$$[4] = \{x \in Z / x = 5k + 4, k \in Z\} = \{... -6, -1, 4, 9, 14 ...\}$$

$$[5] = \{x \in Z / x = 5k + 5, k \in Z\} = \{... -5, 0, 5, 10, ...\} = [0]$$

இதேபோல், $[6] = [1]$; $[7] = [2]$;

இவ்வாறாக, 5 வெவ்வேறான தொகுப்புகள் மட்டுமே 5இன் மட்டுக்குரிய தொகுப்புகளாகப் பெறப்படும் என்பதை அறிகிறோம். மேலும் இவற்றின் சேர்ப்பு கணம் Z என்பது தெளிவு. 5இன் மட்டுக்குரிய சர்வ சம தொகுப்புகளாவன,

$$Z_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

இதேப் போல், 6-இன் மட்டுக்கு, $Z_6 = \{[0], [1] .... [5]\}$ என்பதை அடைகிறோம்.

இவ்வாறாக, எந்த ஒரு முழு எண் nக்கும் $Z_n = \{[0], [1] \ldots [n-1]\}$ ஆகும்.

இங்கு $[n] = [0]$, மேலும் இத் தொகுப்புகளின் சேர்ப்புக் கணம் Z ஆகும்.

சர்வ சம தொகுப்புகளின் மீதான செயலிகள் :

(1) *கூட்டல் :*

$[a], [b] \in Z_n$ என்க.

$$[a] +_n [b] = [a+b] \ ; \ a+b < n \text{ எனில்}$$

$$= [r] \ ; a+b \geq n \text{ எனில்}$$

இங்கு r என்பது $a + b$-ஐ n-ஆல் வகுப்பதால் பெறப்படும் மீச்சிறு குறையற்ற மீதியாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

Z_{10}இல், $[5] +_{10} [7] = [2]$

Z_8இல், $[3] +_8 [5] = [0]$

(ii) *பெருக்கல் :*

$$[a] \cdot_n [b] = \begin{cases} [ab] \ ; & ab < n \text{ எனில்} \\ [r] \ ; & ab \geq n \text{ எனில்} \end{cases}$$

இங்கு r என்பது abஐ nஆல் வகுப்பதால் கிடைக்கப்பெறும் மீச்சிறு குறையற்ற மீதியாகும்.

Z_5-இல் $[2] \cdot_5 [2] = [4]$

$[3] \cdot_5 [4] = 2$

Z_7-இல் $[3] \cdot_7 [3] = [2]$

Z_8-இல் $[5] \cdot_8 [3] = [7]$

எடுத்துக்காட்டு 9.25 : $(Z_n, +_n)$ ஒரு குலம் எனக்காட்டுக.

தீர்வு : $Z_n = \{[0], [1], [2], \ldots [n-1]\}$ என்பது n-இன் மட்டுக்கு காணப்பெற்ற சர்வசமத் தொகுப்புகள் என்க.

$[l], [m], \in Z_n \quad 0 \leq l, m, < n$ என்க.

(i) ***அடைப்பு விதி :*** வரையறைப்படி,

$$[l] +_n [m] = \begin{cases} [l+m] & l+m < n \text{ எனில்} \\ [r] & l+m \geq n \text{ எனில்} \end{cases}$$

இங்கு $l + m = q \cdot n + r \quad 0 \leq r < n$

இரு நிலைகளிலும் $[l+m] \in Z_n$ மற்றும் $[r] \in Z_n$

$\therefore$ அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

(ii) n-இன் மட்டுக்குரிய கூட்டல் எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும் ஆதலால் சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும்.

(iii) சமனி உறுப்பு $[0] \in Z_n$, அது சமனி விதியைப் பூர்த்தி செய்கிறது.

(iv) $[l] \in Z_n$-இன் எதிர்மறை $[n-l] \in Z_n$ மற்றும்

$$[l] +_n [n-l] = [0]$$

$$[n-l] +_n [l] = [0]$$

$\therefore$ எதிர்மறை விதி உண்மையாகும். $\therefore (Z_n, +_n)$ ஒரு குலமாகும்.

குறிப்பு : $(Z_n, +_n)$ ஆனது n வரிசை கொண்ட முடிவான எபீலியன் குலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.26 : $(Z_7 - \{[0]\}, \cdot_7)$ ஒரு குலத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $G = [[1], [2], \ldots [6]]$ என்க.

கேய்லி அட்டவணையானது

$\cdot_7$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

அட்டவணையிலிருந்து :

(i) பெருக்கல் அட்டவணையின் எல்லா உறுப்புகளும் G-இன் உறுப்புகளாகும். $\therefore$ அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

(ii) 7-இன் மட்டுக்கான பெருக்கல், சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.

(iii) சமனியுறுப்பு $[1] \in G$ மற்றும் இது சமனி விதியைப் பூர்த்தி செய்யும்.

(iv) [1]-இன் எதிர்மறை [1] ; [2]-இன் எதிர்மறை [4] ; [3]-இன் எதிர்மறை [5] ; [4]-இன் எதிர்மறை [2] ; [5]-இன் எதிர்மறை [3] மற்றும் [6]-இன் எதிர்மறை [6] எனவே எதிர்மறை விதி பூர்த்தியாகிறது.

பொதுவாக எந்த ஒரு பகா எண் p-க்கும் $(Z_p - \{(0)\}, \cdot_p)$ ஒரு குலம் எனக்காட்டலாம். இதன் நிரூபணம் இப்புத்தகத்தின் பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

குறிப்பு : n ஒரு மிகை முழு எண் என்க. n-இன் மட்டுக்கு காணப்பெற்ற பூச்சியமற்ற சர்வசமத் தொகுப்புகள், n-இன் மட்டுக்கான பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குலத்தை அமைக்குமா?

எடுத்துக்காட்டு 9.27 : வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ் 1-இன் n-ஆம் படி மூலங்கள் முடிவான குலத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு : 1-இன் nஆம் படி மூலங்களாவன $1, \omega, \omega^2 ...... \omega^{n-1}$.

$G = \{1, \omega, \omega^2 ... \omega^{n-1}\}$ என்க. இங்கு $\omega = \text{cis}\,\dfrac{2\pi}{n}$

(i) ***அடைப்பு விதி :*** $\omega^l, \omega^m \in G, \quad 0 \le l, m \le (n-1)$

$\omega^l\, \omega^m = \omega^{l+m} \in G$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

நிலை (i) $l + m < n$ என்க.

$l + m < n$ எனில், $\omega^{l+m} \in G$

நிலை (ii) $l + m \ge n$ என்க. வகுத்தல் கோட்பாட்டின்படி,

$l + m = (q \,.\, n) + r, \quad 0 \le r < n,$ q மிகை முழு எண்.

$\omega^{l+m} = \omega^{qn+r} = (\omega^n)^q \,.\, \omega^r = (1)^q\omega^r = \omega^r \in G \quad \because 0 \le r < n$

அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

(ii) ***சேர்ப்பு விதி :*** கலப்பெண்களின் கணத்தில் பெருக்கலானது எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதியை உண்மையாக்கும்.

i.e., $\omega^l .(\omega^p.\omega^m) = \omega^l \,.\, \omega^{(p+m)} = \omega^{l+(p+m)} = \omega^{(l+p)+m} = (\omega^{l+p}) \,.\, \omega^m$

$= (\omega^l \,.\, \omega^p) \,.\, \omega^m = \forall\, \omega^l, \omega^m, \omega^p \in G$

(iii) ***சமனி விதி :*** சமனி உறுப்பு $1 \in G$ மற்றும் அது

$1.\omega^l = \omega^l .1 = \omega^l \;\forall\; \omega^l \in G$ என்பதை பூர்த்தி செய்கிறது.

(iv) ***எதிர்மறை விதி :***

$\omega^l \in G$க்கு $\omega^{n-l} \in G$ மற்றும் $\omega^l \,.\, \omega^{n-l} = \omega^{n-l} .\omega^l = \omega^n = 1$

இவ்வாறாக எதிர்மறை விதி உண்மையாகிறது.

$\therefore (G, .)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) ***பரிமாற்று விதி :***

$\omega^l \,.\, \omega^m = \omega^{l+m} = \omega^{m+l} = \omega^m \,.\, \omega^l \quad \forall\, \omega^l, \omega^m \in G$

$\therefore (G, .)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும். G-இல் n உறுப்புகள் மட்டுமே உள்ளதால், $(G, .)$ ஆனது n வரிசை கொண்ட முடிவான எபீலியன் குலமாகும்.

9.2.4. ஒரு உறுப்பின் வரிசை **(Order of an element) :**

G ஒரு குலம் மற்றும் $a \in G$ என்க. G-இன் சமனி உறுப்பு e என்க. $a^n = e$ எனுமாறு காணப்பெற்ற மீச்சிறு மிகை முழு எண் n-ஐ a-இன் வரிசையாக வரையறுப்பர். அத்தகைய மிகை முழு எண் காண முடியாவிடில், aஆனது முடிவற்ற வரிசை கொண்டது என்பர். a-இன் வரிசையை $o(a)$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

குறிப்பு : *இங்கு $a^n = a * a * a \ldots *a$ (n தடவைகள்). * ஆனது வழக்கமான பெருக்கல் '.' எனில், a^n என்பது a . a .a... (n தடவைகள்).*

**ஆனது வழக்கமான கூட்டல் எனில், a^n என்பது $a + a + \ldots + a$ ...(n தடவைகள்). இதிலிருந்து a^nஐ a-இன் அடுக்கு n என்ற அர்த்தத்தில் கொள்வது சரியல்ல என்றும், ஈருறுப்புச் செயலியைப் பொறுத்து அதன் அர்த்தம் மாறும் என்பதை அறிகிறோம். $a \in G$ எனில் $a^n \in G$ (அடைப்பு விதியைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்த).*

தேற்றம் :

G ஒரு குலம் என்க. G-இன் சமனி உறுப்பு மட்டுமே வரிசை 1 கொண்ட உறுப்பாகும்.

நிரூபணம் : *$a\ (\neq e)$ என்பது வரிசை 1 கொண்ட மற்றொரு உறுப்பு என்க. வரிசையின் வரையறைப்படி, $(a)^1 = e \Rightarrow a = e$. இது ஒரு முரண்பாடாகும். எனவே e மட்டும்தான் வரிசை 1 கொண்ட உறுப்பாகும்.*

எடுத்துக்காட்டு 9.28 : *$G = \{1, -1, i, -i\}$ என்க. (G, .)-குலத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் வரிசையைக் காண்க.*

தீர்வு : *தரப்பட்டுள்ள குலத்தின் சமனி உறுப்பு 1.* $\therefore$ o(1) = 1.

o(− 1) = 2 [$\because -1$ஐ குறைந்தபட்சம் 2 தடவைகள் பெருக்குவதால் 1 அடைகிறோம். i.e., (− 1) (− 1) = 1]

o(i) = 4 [$\because i$ ஐ 4 தடவைகள் பெருக்குவதால் 1 அடைகிறோம்.

i.e., (i) (i) (i) (i) = 1]

o (− i) = 4 [$\because -i$-ஐ 4 தடவை பெருக்குவதால் 1 அடைகிறோம்].

எடுத்துக்காட்டு 9.29 : *வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ் $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ஆனது ஒரு குலம் எனப் பார்த்தோம். இதிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பின் வரிசையைக் காண்க. இங்கு ω என்பது 1-இன் 3ஆம் படி மூலமாகும்.*

தீர்வு : *சமனி உறுப்பு 1 ஆகும்.* $\therefore$ o(1) = 1.

$$o(\omega) = 3. \ \because \ \omega \,.\, \omega \,.\, \omega = \omega^3 = 1$$

$$o(\omega^2) = 3 \ \because (\omega^2)\,(\omega^2)\,(\omega^2) = \omega^6 = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 9.30 : *$(Z_4, +_4)$ என்ற குலத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் வரிசையைக் காண்க.*

***தீர்வு* :** $Z_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$; 4இன் மட்டுக்கு இது ஒரு எபீலியன் குலமாகும். சமனி உறுப்பு [0] மற்றும் [4] = [8] = [12] = [0]

$\therefore$ o ([0]) = 1

o ([1]) = 4 [$\because$[1]ஐ குறைந்தபட்சம் 4 தடவைகள் கூட்டினால் [4] அல்லது [0] கிடைக்கும்]

o ([2]) = 2 [$\because$ [2]ஐ குறைந்தபட்சம் 2 தடவைகள் கூட்டினால் [4] அல்லது [0] கிடைக்கும்]

o ([3]) = 4 [$\because$[3]ஐ குறைந்தபட்சம் 4 தடவைகள் கூட்டினால் [12] அல்லது [0] கிடைக்கும்]

9.2.5. குலங்களின் பண்புகள் (Properties of Groups) :

***தேற்றம்* :** ஒரு குலத்தின் சமனி உறுப்பு ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்தது.

***நிரூபணம்* :** G ஒரு குலம் என்க. G-இன் சமனி உறுப்புகள் e_1, e_2 என இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

e_1ஐ சமனி உறுப்பாகக் கொள்வோமாயின், $e_1 * e_2 = e_2$ … (1)

e_2ஐ சமனி உறுப்பாகக் கொள்வோமாயின், $e_1 * e_2 = e_1$ … (2)

(1) மற்றும் (2)-இலிருந்து $e_1 = e_2$ என பெறுகிறோம். எனவே, ஒரு குலத்தின் சமனி உறுப்பு ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும்.

***தேற்றம்* :**

ஒரு குலத்தில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரே ஒரு எதிர்மறையைப் பெற்றிருக்கும்.

***நிரூபணம்* :**

G ஒரு குலம் என்க. $a \in G$ என்க.

a-இன் எதிர்மறை உறுப்புகள் a_1, a_2 என்பதாகக் கொள்வோம்.

a_1ஐ a-இன் எதிர்மறையாகக் கொள்வோமாயின், $a * a_1 = a_1 * a = e$.

a_2ஐ a-இன் எதிர்மறையாகக் கொள்வோமாயின், $a * a_2 = a_2 * a = e$

$$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2$$

எனவே ஒரு உறுப்பின் எதிர்மறை ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும்.

***தேற்றம்* : (*நீக்கல் விதி*) (Cancellation law)**

G ஒரு குலம் என்க. $a, b, c \in G$ என்க.

(i) $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ (இடது நீக்கல் விதி)

(ii) $b * a = c * a \Rightarrow b = c$ (வலது நீக்கல் விதி)

நிரூபணம் : (i) $a * b = a * c \Rightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

$$\Rightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$$
$$\Rightarrow e * b = e * c$$
$$\Rightarrow b = c$$

(ii) $b * a = c * a \Rightarrow (b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$

$$\Rightarrow b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$$
$$\Rightarrow b * e = c * e$$
$$\Rightarrow b = c$$

தேற்றம் : ஒரு குலம் G-இல் $(a^{-1})^{-1} = a \ \forall \ a \in G$.

நிரூபணம் :

$a^{-1} \in G$ என்பதால் $(a^{-1})^{-1} \in G$. $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

$$a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e$$
$$\Rightarrow a * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1}$$
$$\Rightarrow a = (a^{-1})^{-1} \text{ (வலது நீக்கல் விதிப்படி)}$$

தேற்றம் : **(Reversal law)**

G ஒரு குலம் என்க. $a, b \in G$ என்க. அவ்வாறாயின்,

$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

நிரூபணம் : $b^{-1} * a^{-1}$ ஆனது $(a * b)$-இன் எதிர்மறை எனக் காட்டினால் போதுமானது.

$\therefore$ (i) $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e$ மற்றும்

(ii) $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

(i) $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1}$

$$= a * (e) * a^{-1}$$
$$= a * a^{-1} = e$$

(ii) $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b$

$$= b^{-1} * (e) * b$$
$$= b^{-1} * b = e$$

$\therefore a * b$-இன் எதிர்மறை $b^{-1} * a^{-1}$; i.e., $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

பயிற்சி 9.4

(1) S என்பது வெற்றற்ற கணம் என்க. o என்கிற ஈருறுப்புச் செயலியை $xoy = x$; $x, y \in S$ எனுமாறு S-இன் மீது வரையறுப்போம். o ஆனது பரிமாற்று மற்றும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படுமா என்பதைத் தீர்மானிக்க.

(2) $x * y = \max \{x, y\}$ என்றவாறு வரையறுக்கப்பட்ட செயலியின் கீழ் இயல் எண் கணம் N ஆனது ஒரு அரைக்குலம் எனக்காட்டுக. அது சமனியுடைய அரைக்குலமா?

(3) இரட்டை மிகை முழு எண்கள் வழக்கமான கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலின் கீழ் ஒரு அரைக்குலம் எனக் காட்டுக. மேற்கண்ட ஒவ்வொரு செயலின் கீழும் அது சமனியுடைய அரைக்குலமாகுமா?

(4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ என்கிற அணிகள், அணிகளின் பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குலத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

(5) G என்பது மிகை விகிதமுறு எண் கணம் என்க. $a * b = \frac{ab}{3}$ எனுமாறு வரையறுக்கப்பட்ட செயலி *-இன் கீழ் G ஒரு குலத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

(6) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\omega & 0\\0 & \omega^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\omega^2 & 0\\0 & \omega\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \omega^2\\\omega & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \omega\\\omega^2 & 0\end{pmatrix}\right\}$ என்கிற கணம் அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குலத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக. ($\omega^3=1$)

(7) $| z | = 1$ எனுமாறு உள்ள கலப்பெண்கள் யாவும் அடங்கிய கணம் M ஆனது கலப்பெண்களின் பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குலத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

(8) -1-ஐ தவிர மற்ற எல்லா விகிதமுறு எண்களும் உள்ளடக்கிய கணம் G ஆனது $a * b = a + b + ab$ எனுமாறு வரையறுக்கப்பட்ட செயலி *-இன் கீழ் ஒரு எபீலியன் குலத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

(9) 11-இன் மட்டுக்கு காணப்பெற்ற பெருக்கலின்கீழ் $\{[1], [3], [4], [5], [9]\}$ என்ற கணம் ஒரு எபீலியன் குலத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

(10) $(Z_5 - \{[0]\}, \cdot_5)$ என்ற குலத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் வரிசையைக் காண்க.

(11) $\begin{pmatrix}a & o\\o & o\end{pmatrix}$, $a \in R - \{0\}$ அமைப்பில் உள்ள எல்லா அணிகளும் அடங்கிய கணம் அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒரு எபீலியன் குலத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

(12) $G = \{2^n \,/\, n \in Z\}$ என்ற கணமானது பெருக்கலின் கீழ் ஒரு எபீலியன் குலத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

10. நிகழ் தகவுப் பரவல்
(PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

10.1 அறிமுகம் :

முடிவுற்ற அல்லது எண்ணிடத்தக்க மதிப்புகளைப் பெறும் கூறுவெளியைக் கொண்ட சமவாய்ப்பு சோதனைகளைப் பற்றி பதினொன்றாம் வகுப்பில் படித்தோம், நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை ஒதுக்கீடு செய்வது பற்றியும், அவற்றைக் கணக்கிடவும் செய்தோம். அறிவியலில் மாறி என்பது, 'மதிப்புகளின் கணத்தில் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை எடுத்துக் கொள்ளக்கூடிய ஒரு கணியமாக' கருதப்படுகிறது. புள்ளியலில் கையாளப்படும் சமவாய்ப்பு மாறிகள், வாய்ப்பினால் அமையக்கூடிய மதிப்புகளைக் கொண்ட மாறிகளாகும்.

10.2 சமவாய்ப்பு மாறிகள் (Random Variables) :

சோதனையின் விளைவுகள் நேரடியாக மெய் எண்களோடு தொடர்புடையதையோ அல்லது மெய் எண்களோடு தொடர்பு கொள்ளுமாறு விளைவுகளை அமைக்கப் பெறுவதையோ ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியால் குறிக்கப்படுவது வழக்கம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை உருட்டும் சோதனையில் ஒத்த சமவாய்ப்பு மாறியின் விளைவுகள் $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்று நேரடியாக எண்ணால் அமைந்த கணத்தினால் குறிக்கப்படும். நாணயத்தைச் சுண்டி விடும் சோதனையில் விளைவுகளான தலை (H) அல்லது பூ (T) என்பனவற்றை ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியால் பூவிற்கு 0 எனவும் தலைக்கு 1 எனவும் எண்களால் தொடர்பு ஏற்படுத்திக் கொள்ளப்படுகிறது. இதன் அடிப்படையில் சமவாய்ப்பு மாறி என்பது, சமவாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளியின் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ள மெய்மதிப்புடைய ஒரு சார்பாகக் கருதலாம்.

இரு நாணயங்களை ஒருமுறை வீசுவதை சோதனையாகக் கொள்வோம். சோதனையின் விளைவுகள் $\{HH, TH, HT, TT\}$ஆகும். சீரான இரு நாணயங்களைச் சுண்டும்போது 'கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை'யை X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியால் குறிப்போம். தலையே விழாமல் இருக்கும் விளைவை $X = 0$ எனவும், ஒரு தலை விழும் விளைவை $X = 1$ எனவும், 2 தலைகள் விழும் விளைவை $X = 2$ எனவும் குறிக்கலாம்.

அதாவது $X(TT) = 0$, $X(TH) = 1$, $X(HT) = 1$ மேலும் $X(HH) = 2$. அதாவது X ஆனது 0,1,2 என்ற மதிப்புகளை பெறுகிறது. எனவே, கூறுவெளி S-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பு s-க்கும் மெய்யெண் $X(s)$ஐ தொடர்பு படுத்தலாம்.

வரையறை : *நிகழ் தகவு அளவைகளைக் கொண்ட கூறுவெளியை* S *என்க.* X *எனும் ஒரு மெய் மதிப்புச் சார்பினை* S*-ன் உறுப்புகளின் மீது வரையறுக்க முடியுமானால், அது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியாகும்.*

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியை வாய்ப்பு மாறி அல்லது வாய்ப்பு சார்ந்த மாறி (stochastic) *எனவும் அழைக்கலாம்.*

சமவாய்ப்பு மாறியின் வகைகள் :

(1) *தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி* (2) *தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி*

10.2.1 தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி (Discrete Random Variable) :

வரையறை : *ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி முடிவுற்ற அல்லது எண்ணிடத்தக்க மதிப்புகளை மட்டுமே ஏற்கிறது எனில், அது தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியாகும்.*

குறிப்பு : *சீரற்ற (பிறழ்ச்சியான) நாணயம் என்பது, நாணயத்தின் இருபக்கங்களுமே தலையாகப் பொறிக்கப்பட்டிருந்தாலோ அல்லது இரு பக்கங்களுமே பூவாகப் பொறிக்கப்பட்டிருந்தாலோ அல்லது நாணயம் ஒரு பக்கமாகத் தேய்க்கப்பட்டிருந்தாலோ நாணயம் ஒரே பக்கமாக எப்போதும் விழுவதற்கான வாய்ப்புகள் அதிகம். சீரான நாணயம் என்பது தலை விழுவதற்கும் பூ விழுவதற்கும் சமமான வாய்ப்புகள் இருக்க வேண்டும். இது போல சீரற்ற (பிறழ்ச்சியான) பகடையில் ஒரே எண் பல பக்கங்களில் பொறிக்கப்பட்டிருக்கலாம் சில எண்கள் விடுபட்டிருக்கலாம். ஒரு சீரான பகடையில் எந்த ஒரு எண்ணும்* (1 *இலிருந்து* 6 *வரை) விழுவதற்கான நிகழ் தகவு* 1/6 *என இருக்க வேண்டும்.*

எடுத்துக்காட்டு :

1. *இரண்டு நாணயங்களைச் சுண்டி விடும்பொழுது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியாகும். இங்கு* X *ஆனது* 0, 1 *அல்லது* 2 *ஆகிய ஒரு முடிவுற்ற கணத்தின் மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.*
2. *நன்கு கலைக்கப்பட்ட* 52 *சீட்டுகளடங்கிய சீட்டுக் கட்டிலிருந்து* 10 *சீட்டுக்கள் எடுக்கும் போது கிடைக்கும் ஏஸ் சீட்டுக்களின் எண்ணிக்கை.*

இங்கு சமவாய்ப்பு மாறி X *ஆனது* 0, 1, 2, 3 *மேலும்* 4 *என்ற முடிவுற்ற கணத்தின் மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.*

அதாவது X (*ஒரு ஏஸ் சீட்டும் இல்லை*) = 0, X (1 *ஏஸ் சீட்டு*) = 1, X (2 *ஏஸ் சீட்டுக்கள்*) = 2, X (3 *ஏஸ் சீட்டுக்கள்*) = 3,

X (4 *ஏஸ் சீட்டுக்கள்*) = 4

நிகழ் தகவு நிறைச் சார்பு **(Probability Mass Function) :**

ஒரு தனிநிலை நிகழ்தகவுப் பரவல் $p(x)$*-இன் கணித வரையறை பின்வரும் பண்புகளை நிறைவு செய்யும் சார்பாகும் :*

(1) *சமவாய்ப்பு மாறி* X*-இன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு* x*க்கு நிகழ் தகவு* $p(x)$ *அதாவது* $P(X = x) = p(x) = p_x$ *ஆகும்.*

(2) x-இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $p(x)$ குறை எண்ணாக இருக்காது.

(3) x-இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $p(x)$களின் கூடுதல் ஒன்றாகும். அதாவது $\sum p_i = 1$. இங்கு i என்பது X எடுத்துக் கொள்ளும் எல்லா மதிப்புகளையும் குறிக்கும். மேலும் p_i என்பது $X = x_i$-இன் நிகழ் தகவாகும்.

X எனும் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகளாக ஏறும் வரிசையில் $a_1, a_2, \ldots a_m, a, b_1, b_2, \ldots b_n, b$ எனக் கொண்டால்,

(i) $P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$

(ii) $P(X \leq a) = 1 - P(X > a)$

(iii) $P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(X = b_1) + P(X = b_2) + \ldots$
$\ldots + P(X = b_n) + P(X = b)$.

பரவல் சார்பு (Cumulative Distribution function)
அல்லது சேர்ப்பு பரவல் சார்பு :

சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் பரவல் சார்பு

$F(x) = P(X \leq x) = \sum\limits_{x_i \leq x} p(x_i)$: $(-\infty < x < \infty)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

பரவல் சார்பின் பண்புகள் :

1) $F(x)$ ஒரு குறையா சார்பு

2) $0 \leq F(x) \leq 1, \ -\infty < x < \infty$

3) $F(-\infty) = \underset{x \to -\infty}{\text{Lt}} F(x) = 0$

4) $F(\infty) = \underset{x \to +\infty}{Lt} F(x) = 1$

5) $P(X = x_n) = F(x_n) - F(x_{n-1})$

விளக்க எடுத்துக்காட்டு :

மூன்று நாணயங்களை ஒருமுறை சுண்டும்பொழுது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுப் பரவல், சேர்ப்பு பரவல் சார்பு இவற்றைக் காண்க.

தீர்வு : "தலைகள் விழும் எண்ணிக்கையை" சமவாய்ப்பு மாறி X எனக் கொள்வோம். 3 நாணயங்களைச் சுண்டும்பொழுது கிடைக்கும் கூறுவெளி

S	=	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
↓		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
R (தலைகளின் எண்ணிக்கை)	:	3	2	2	2	1	1	1	0

கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையை X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியால் குறிப்பதால், $X = 0, 1,2$ மேலும் 3 ஆகிய மதிப்புகளைக் கொள்கிறது. ($X : S \to R$).

P (ஒரு தலையும் இல்லாமலிருக்க) $= P(X = 0) = \frac{1}{8}$

P (1 தலை கிடைக்க) $= P(X = 1) = \frac{3}{8}$

P (2 தலைகள் கிடைக்க) $= P(X = 2) = \frac{3}{8}$

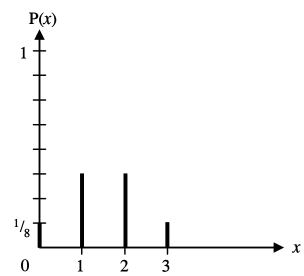
P (3 தலைகள் கிடைக்க) $= P(X = 3) = \frac{1}{8}$

∴ கிடைக்கும் நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$P(X = x) = \begin{cases} 1/8 & x = 0 \text{ எனில்} \\ 3/8 & x = 1 \text{ எனில்} \\ 3/8 & x = 2 \text{ எனில்} \\ 1/8 & x = 3 \text{ எனில்} \end{cases}$$

OR

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8



படம் 10.1

சேர்ப்பு பரவல் சார்பைக் காண :

$$F(x) = \sum_{x_i = -\infty}^{x} P(X = x_i)$$

$$X = 0 \text{ எனில்}, \; F(0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$X = 1 \text{ எனில்}, \; F(1) = \sum_{i = -\infty}^{1} P(X = x_i)$$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$X = 2 \text{ எனில்}, \; F(2) = \sum_{i = -\infty}^{2} P(X = x_i)$$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

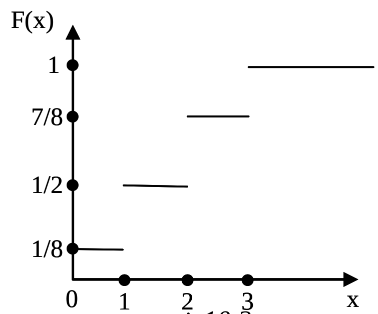
$X = 3$ எனில், $F(3) = \sum_{i=-\infty}^{3} P(X = x_i)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

சேர்ப்புப் பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \text{ எனில்} \\ 1/8 & 0 \le x < 1 \text{ எனில்} \\ 1/2 & 1 \le x < 2 \text{ எனில்} \\ 7/8 & 2 \le x < 3 \text{ எனில்} \\ 1 & 3 \le x < \infty \text{ எனில்} \end{cases}$$



படம் 10.2

எடுத்துக்காட்டு 10.1 :

இரு பகடைகளை வீசும் போது '3'கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு மற்றும் சேர்ப்புப் பரவல் சார்பு காண்க.

தீர்வு : இரு பகடைகள் உருட்டப் படுகின்றன. கிடைக்கும் '3'களின் எண்ணிக்கையை சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. $\therefore$ X என்பது 0, 1, 2 ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

P('3' அல்லாமல் கிடைக்க) $= P(X = 0) = \frac{25}{36}$

P(ஒரு '3' கிடைக்க) $= P(X = 1) = \frac{10}{36}$

P(இரு '3'கிடைக்க) $= P(X = 2) = \frac{1}{36}$

கூறுவெளி

(1,1)	(1,2)	**(1,3)**	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	**(2,3)**	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	**(3,2)**	**(3,3)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(3,6)**
(4,1)	(4,2)	**(4,3)**	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	**(5,3)**	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	**(6,3)**	(6,4)	(6,5)	(6,6)

கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு கிடைக்கிறது.

x	0	1	2
$P(X = x)$	25/36	10/36	1/36

சேர்ப்புப் பரவல் சார்பு :

$$F(x) = \sum_{x_i = -\infty}^{x} P(X = x_i)$$

$$F(0) = P(X = 0) = \frac{25}{36}$$

$$F(1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{25}{36} + \frac{10}{36} = \frac{35}{36}$$

$$F(2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{25}{36} + \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

x	0	1	2
$F(x)$	25/36	35/36	1

எடுத்துக்காட்டு 10.2 *ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு பரவல் பின்வருமாறு உள்ளது :*

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	k	$3k$	$5k$	$7k$	$9k$	$11k$	$13k$

(1) k-இன் மதிப்பு காண்க.

(2) $P(X < 4)$, $P(X \geq 5)$ மேலும் $P(3< X \leq 6)$இவற்றின் மதிப்பு காண்க.

(3) $P (X \leq x) > \frac{1}{2}$ ஆக இருக்க xஇன் மீச்சிறு மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

(1) P(X = x) ஒரு நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு என்பதால் $\sum_{x=0}^{6} P(X = x) = 1$

ie.,$P(X=0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1.$

$\Rightarrow k + 3k + 5k + 7k + 9k + 11k + 13k = 1 \Rightarrow 49k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{49}$

(2) $P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= \frac{1}{49} + \frac{3}{49} + \frac{5}{49} + \frac{7}{49} = \frac{16}{49}$$

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{11}{49} + \frac{13}{49} = \frac{24}{49}$$

$$P(3 < X \leq 6) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{9}{49} + \frac{11}{49} + \frac{13}{49} = \frac{33}{49}$$

(3) xஇன் மீச்சிறு மதிப்பை சோதனை முறையில் காணலாம்.

$$P(X \le 0) = \frac{1}{49} < \frac{1}{2} \; ; \; P(X \le 1) = \frac{4}{49} < \frac{1}{2}$$

$$P(X \le 2) = \frac{9}{49} < \frac{1}{2} \; ; \; P(X \le 3) = \frac{16}{49} < \frac{1}{2}$$

$$P(X \le 4) = \frac{25}{49} > \frac{1}{2}$$

$P(X \le x) > \frac{1}{2}$ ஆக இருக்க xஇன் மீச்சிறு மதிப்பு 4 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.3 : ஒரு கொள்கலத்தில் 4 வெள்ளை மற்றும் 3 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. 3 பந்துகளை ஒவ்வொன்றாக எடுக்கும் போது, சிவப்பு நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுப் பரவல் (நிறைச்சார்பு) காண்க.

(i) திருப்பி வைக்கும் முறையில் (ii) திருப்பி வைக்கா முறையில்

தீர்வு : (i) திருப்பி வைக்கும் முறையில்

3 முறை பந்துகளை எடுக்கும் போது கிடைக்கும் சிவப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையை சமவாய்ப்பு மாறி X எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ X என்பது 0,1,2,3 மேலும் 3 என்ற மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

P(சிவப்புப் பந்து எடுக்க) $= \frac{3}{7} = P(R)$

P(சிவப்புப் பந்தில்லாமல் இருக்க)$= \frac{4}{7} = P(\mathrm{w})$

$$\therefore P(X = 0) = P(\mathrm{www}) = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{64}{343}$$

$$P(X = 1) = P(Rww) + P(wRw) + P(wwR)$$

$$= \left(\frac{3}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}\right)$$

$$= 3 \times \frac{48}{343} = \frac{144}{343}$$

$$P(X = 2) = P(RRw) + P(RwR) + P(wRR)$$

$$= \left(\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}\right)$$

$$= 3 \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = 3 \times \frac{36}{343} = \frac{108}{343}$$

$$P(X = 3) = P(RRR) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{27}{343}$$

தேவையான நிகழ்தகவுப் பரவல் பின்வருமாறு :

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	64/343	144/343	108/343	27/343

இங்கு எல்லா p_i களும் ≥ 0 மற்றும் $\sum p_i = 1$ ஆகும்.

2) ***திருப்பி வைக்கா முறையில் :*** *(ஒரே நேரத்தில் 3 பந்துகளையும் எடுக்கும் நிகழ்ச்சியாகவும் கொள்ளலாம்).*

முறை 1 : ***(சேர்வுகளைப் பயன்படுத்தி)***	***முறை 2 :*** ***(நிபந்தனை நிகழ்தகவினைப் பயன்படுத்தி)***
(i) P(சிவப்புப் பந்து இல்லாமலிருக்க) $P(X=0) = \dfrac{4c_3 \times 3c_0}{7c_3}$ $= \dfrac{4 \times 1}{35} = \dfrac{4}{35}$	(i) $P(www) = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5}$ $= \dfrac{4}{35}$
(ii) P(1 சிவப்புப் பந்து) $P(X=1) = \dfrac{4c_2 \times 3c_1}{7c_3}$ $= \dfrac{6 \times 3}{35} = \dfrac{18}{35}$	(ii) $P(Rww) + P(wRw) + P(wwR)$ $= \left(\dfrac{3}{7} \times \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5}\right) + \left(\dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{3}{5}\right) + \left(\dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{3}{5}\right)$ $= 3 \times \dfrac{36}{210} = \dfrac{36}{70} = \dfrac{18}{35}$
(iii) P(2 சிவப்புப் பந்துகள்) $P(X=2) = \dfrac{4c_1 \times 3c_2}{7c_3}$ $= \dfrac{4 \times 3}{35} = \dfrac{12}{35}$	(iii) $P(RRw) + P(RwR) + P(wRR)$ $= \left(\dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{4}{5}\right) + \left(\dfrac{3}{7} \times \dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{5}\right) + \left(\dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5}\right)$ $= 3 \times \dfrac{24}{210} = \dfrac{12}{35}$
(iv) P(3 சிவப்புப் பந்துகள்) $P(X=3) = \dfrac{4c_0 \times 3c_3}{7c_3}$ $= \dfrac{1 \times 1}{35} = \dfrac{1}{35}$	(iv) $P(RRR) = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{5}$ $= \dfrac{1}{35}$

∴ தேவையான நிகழ்தகவுப் பரவல் பின்வருமாறு :

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

எல்லா p_i களும் ≥ 0 மற்றும் $\sum p_i = 1$

10.2.2 தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி (Continuous Random Variable) :

வரையறை : குறிப்பிட்ட ஒரு இடைவெளியிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் பெறவல்ல ஒரு மாறியே தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியாகும். (அ.து.) X-இன் மதிப்புகளை இயல் எண்கள் Nஉடன் 1க்கு 1 தொடர்பு செய்ய முடியாமல் இருந்தால் X தொடர் மாறியாகும்.

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

- ஒரு மின் விளக்கின் ஆயுட் காலம் (மணி நேரங்களில்)
- சமவாய்ப்பு முறையில் (at random) தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு ரசாயனக் கலவையின் ph மதிப்பை X எனக் கொள்வோம்.. ph மதிப்பு 0 முதல் 14 வரையிலுள்ள இடைவெளியில் எந்த ஒரு மதிப்பாகவும் இருக்கலாம். எனவே X ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியாகும்.
- ஏரியைப் பற்றிய ஆய்வில், சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட இடங்களில் ஆழங்கள் அளக்கப்படுகின்றன. ஒரு இடத்தின் ஆழம் = X, ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியாகும். தேர்வு செய்யப்பட்ட பகுதியின் மீச்சிறு, மீப்பெரு ஆழங்களின் வித்தியாசமே X-ன் எல்லைகளாகும்.

நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பு (Probability Density Function) :

ஒரு தொடர் நிகழ் தகவுப் பரவல் சார்பு $f(x)$ என்பது

(i)இரு புள்ளிகள் a மற்றும் bக்கும் இடையில் X அமைக்கும் நிகழ்தகவு

(அ.து.) $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$

(ii) X-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x)$ குறையற்ற எண்.

(iii) நிகழ்தகவுப் பரவலின் தொகையீட்டு மதிப்பு 1 (அ.து.) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

ஆகிய பண்புகளை நிறைவு செய்யும் சார்பு ஆகும். அது, தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு சார்பின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனப்படும். இதைச் சுருக்கமாக $p.d.f.$ எனக் குறிக்கலாம். ஒரு இடைவெளியின் எண்ணற்ற மதிப்புகளுக்கு தொடர் நிகழ் தகவுப் பரவல் வரையறுக்கப்படுவதால், ஒரு புள்ளியில் நிகழ் தகவின் மதிப்பு எப்போதும் பூச்சியமாகும்.

(அ.து.), $P(X = a) = \int_{a}^{a} f(x)\, dx = 0.$

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ் தகவுகள் இடைவெளிகளில் மட்டுமே கணக்கிடப்படுகின்றன. ஒரு புள்ளிக்கு அல்ல. இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட ஒரு வளைவரையின் பரப்பு, அந்த இடைவெளியில் நிகழ்தகவைக் குறிக்கின்றது.

$\therefore\ P(a \leq x \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < x \leq b) = P(a < x < b)$

தனி நிலை நிகழ்தகவுப் பரவலை நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு என்றும், தொடர் நிகழ் தகவுப் பரவலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்றும் குறிக்கப்படுகின்றன, நிகழ்தகவுச் சார்பு என்பது தனிநிலை மற்றும் தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவல் இரண்டையுமே குறிக்கும்.

***சேர்ப்புப் பரவல் சார்பு* (Cumulative Distribution Function) :**

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ஐ உடைய ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு X-ன் பரவல் சார்பானது,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad -\infty < x < \infty \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $f(t)$ என்பது 't'-ல் அமைந்த x-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு ஆகும்.

***பரவல் சார்பின் பண்புகள்* (Properties of Distribution function) :**

(i) $F(x)$ ஒரு குறையா சார்பு

(ii) $0 \leq F(x) \leq 1,\ -\infty < x < \infty.$

(iii) $F(-\infty) = \underset{x \to -\infty}{lt} \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x)\, dx = 0$

(iv) $F(\infty) = \underset{x \to \infty}{lt} \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

(v) எவ்விரு மெய்மதிப்புகள் a, b ($a \leq b$)க்கும்
$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

(vi) $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$ $\quad$ i.e., $F'(x) = f(x)$

எடுத்துக்காட்டு 10.4 : ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது.

$$f(x) = \begin{cases} k\,x\,(1 - x)^{10} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், kஇன்மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானதால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

i.e., $\int_0^1 kx(1-x)^{10}\, dx = 1$ $\left(\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)dx\right)$

i.e., $\int_0^1 k(1-x)\,[1-(1-x)]^{10} dx = 1$

i.e., $k\int_0^1 (1-x)x^{10} dx = 1$

i.e., $k\int_0^1 (x^{10}-x^{11})dx = 1 \Rightarrow k\left[\frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{12}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow k\left[\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right] = 1 \Rightarrow k = 132$

எடுத்துக்காட்டு 10.5 : ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = 3x^2,\ 0 \le x \le 1$
$= 0$ மற்றெங்கிலும்

(i) $P(X \le a) = P(X > a)$ *(ii)* $P(X > b) = 0.05$ எனில் a, b-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : (i) நிகழ்தகவின் கூடுதல் 1 ஆகும்.

$P(X \le a) = P(X > a)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$P(X \le a) + P(X > a) = 1$$

i.e., $P(X \le a) + P(X \le a) = 1$

$$\Rightarrow P(X \le a) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^a f(x)\, dx = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^a 3x^2\, dx = \frac{1}{2}$$

i.e., $\left[\frac{3x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{2} \Rightarrow a^3 = \frac{1}{2}$ *i.e.,* $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

(ii) $P(X > b) = 0.05$

$$\therefore \int_b^1 f(x)\, dx = 0.05 \quad \therefore \int_b^1 3x^2\, dx = 0.05$$

$$\left[\frac{3x^3}{3}\right]_b^1 = 0.05 \Rightarrow 1 - b^3 = 0.05$$

$$b^3 = 1 - 0.05 = 0.95 = \frac{95}{100} \Rightarrow b = \left(\frac{19}{20}\right)^{\frac{1}{3}}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.6 : *ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு*

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், (i) k*இன் மதிப்பைக் காண்க.*

(ii) *சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பைக் காண்க.*

தீர்வு: (i) $f(x)$ *ஒரு நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பு ஆதலால்* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_0^1 k(1 - x^2)\,dx = 1 \quad \Rightarrow k\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow k\left[1 - \frac{1}{3}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)k = 1 \text{ அல்லது } k = \frac{3}{2}$$

(ii) *பரவல் சார்பு* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

(a) $x \in (-\infty, 0]$ *எனில்,*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$$

(b) $x \in (0, 1)$ *எனில்*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = 0 + \int_0^x \frac{3}{2}(1 - t^2)\,dt = \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

(c) $x \in [1, \infty)$ எனில்

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt = 0 + \int_{0}^{1} \frac{3}{2}(1 - t^2)\,dt + 0$$

$$= \frac{3}{2}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 \qquad \therefore F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \le 0 \\ 3/2\,(x - x^3/3) & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.7 : $F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} x\right) \quad -\infty < x < \infty$ என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி Xஇன் பரவல் சார்பு எனில் $P(0 \le x \le 1)$ஐ காண்க.

தீர்வு: $F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} x\right)$

$$P(0 \le x \le 1) = F(1) - F(0)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} 1\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} 0\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right] - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.8 :

$$f(x) = \begin{cases} A/x & 1 < x < e^3 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் $P(x > e)$ காண்க.

தீர்வு : $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு ஆனதால், $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{1}^{e^3} \frac{A}{x}\,dx = 1 \Rightarrow A[\log x]_1^{e^3} = 1$$

$$\Rightarrow A[\log e^3 - \log 1] = 1 \Rightarrow A[3] = 1 \Rightarrow A = 1/3$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/3x & 1 < x < e^3 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

$$P(x > e) = \frac{1}{3} \int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{3}\, [\log x]_{e}^{e^3}$$

$$= \frac{1}{3}\, [\log e^3 - \log e] = \frac{1}{3}\, [3 - 1] = \frac{2}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.9 : $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$

என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் $F(2)$*இன் மதிப்பு காண்க.*

தீர்வு : $F(2) = P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\, dx$

$$= \int_{0}^{2} 2\, e^{-2x}\, dx = 2 \,.\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{0}^{2} = -\, [e^{-4} - 1] = 1 - e^{-4} = \frac{e^4 - 1}{e^4}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.10 : *ஐந்து வயதுடைய ஒரு உயர்ந்த வகை நாயின் முழு ஆயுட்காலம் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியாகும். அதன் பரவல் சார்பு (சேர்ப்பு)*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 5 \\ 1 - \dfrac{25}{x^2} & , \quad x > 5 \end{cases}$$

எனில் 5 வயதுடைய நாய் (i) 10 *ஆண்டுகளுக்குக் குறைவாக* (ii) 8 *ஆண்டுகளுக்குக் குறைவாக* (iii) 12*இலிருந்து* 15 *ஆண்டுகள் வரை உயிர் வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.*

தீர்வு : (i) P(*நாய்* 10 *ஆண்டுகளுக்கு மேல் உயிர் வாழ*)

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{25}{x^2}\right) \qquad x = 10$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

(ii) P(*நாய்* 8 *ஆண்டுகளுக்குக் குறைவாக உயிர் வாழ*)

$P(X < 8) = F(8)$ [*ஏனெனில் ஒரு தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவலில்* $P(X < 8) = P(X \leq 8)$]

$$= \left(1 - \frac{25}{8^2}\right) = \left(1 - \frac{25}{64}\right) = \frac{39}{64}$$

(iii) P(*நாய்* 12*இலிருந்து* 15 *ஆண்டுகள் வரை உயிர் வாழ*) $= P(12 < x < 15)$

$$= F(15) - F(12) = \left(1 - \frac{25}{15^2}\right) - \left(1 - \frac{25}{12^2}\right) = \frac{1}{16}$$

பயிற்சி 10.1

(1) மூன்று பகடைகளை ஒருமுறை வீசும்பொழுது 6-கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க.

(2) நன்கு கலைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகளிலிருந்து இரு சீட்டுகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாகத் திருப்பி வைக்காமல் எடுக்கப்படுகிறது. ராணிச் சீட்டுகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க.

(3) இரு அழுகிய ஆரஞ்சுப் பழங்கள் தற்செயலாக பத்து நல்ல ஆரஞ்சுப் பழங்களுடன் கலந்து விட்டன. இதிலிருந்து மூன்று பழங்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் திரும்ப வைக்காமல் எடுக்கப்படுகின்றன. அழுகிய ஆரஞ்சுப் பழங்களின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க.

(4) ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல் (நிறைச்சார்பு) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(x)	a	3 a	5 a	7 a	9 a	11 a	13 a	15 a	17 a

(i) aஇன் மதிப்பு காண்க (ii) $P(x < 3)$ (iii) $P(3 < x < 7)$ இவற்றைக் காண்க.

(5) பின்வருபவன நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புகளா என சரிபார்க்கவும்.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x/9 & 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{(1 + x^2)}, -\infty < x < \infty$

(6) $f(x) = \begin{cases} cx\,(1 - x)^3 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$

என்ற சார்பு ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு எனில்

(i) c (ii) $P\left(x < \frac{1}{2}\right)$ காண்க.

(7) ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி xஇன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} kx^{\alpha - 1}\, e^{-\beta x^{\alpha}} & x, \alpha, \beta > 0 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில் (i) kஇன் மதிப்பு காண்க (ii) $P(X > 10)$ காண்க.

(8) ஒரு பரவல் சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

எனில் அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ஐக் காண்க. மேலும்

(i) $P(0.5 < X < 0.75)$ (ii) $P(X \le 0.5)$ (iii) $P(X > 0.75)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(9) ஒரு தொடர் மாறி பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-ax} & 0 < x < \infty \quad a > 0 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில் cஇன் மதிப்பு காண்க.

(10) ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு பின்வருமாறு உள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

(i) kஇன் மதிப்பு காண்க (ii) $P\left(0 < X < \frac{\pi}{2}\right)$ (iii) $P\left(\frac{\pi}{2} < X < \frac{3\pi}{2}\right)$ காண்க.

10.3 கணித எதிர்பார்ப்பு (Mathematical Expectation) :

ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்ப்பு :

வரையறை : $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளை ஏற்கும் X என்ற தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவுகள் முறையே $p_1, p_2, \ldots p_n$ என இருப்பின் கணித எதிர்பார்ப்பு,

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots\ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{ இங்கு } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

எனவே $E(X)$ என்பது x_iகளின் நிறையிட்ட சராசரி ஆகும்.

$p(x_i)$ நிறைகளாக அமையும். $\therefore \overline{X} = E(X)$

எனவே சமவாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்பார்ப்பு என்பது கூட்டுச்சராசரி என்பதேயாகும்.

முடிவு : சமவாய்ப்பு மாறியின் சார்பு $\varphi(X)$ எனில்

$E[\varphi(X)] = \sum P(X = x)\, \varphi(x)$.

பண்புகள் :

முடிவு (1) : $E(c) = c$ இங்கு c மாறிலி

நிரூபணம் : $E(X) = \sum p_i x_i$

$\therefore E(c) = \sum p_i c = c \sum p_i = c$ as $\sum p_i = 1$

$\therefore E(c) = c$

முடிவு (2) : $E(cX) = c\, E(X)$

நிரூபணம் : $E(cX) = \sum (cx_i)p_i = (c\,x_1)\,p_1 + (c\,x_2)\,p_2 + \ldots (c\,x_n)\,p_n$

$= c(\,p_1\,x_1 + p_2 x_2 + \ldots .\ p_n\,x_n)$

$= c\,E(X)$

முடிவு (3) : $E(aX + b) = a\,E(X) + b.$

நிரூபணம் : $E(aX + b) = \sum (a\,x_i + b)\,p_i$

$= (a\,x_1 + b)\,p_1 + (a\,x_2 + b)p_2 + (a\,x_n + b)\,p_n$

$= a(\,p_1\,x_1 + p_2 x_2 + \ldots .\ p_n\,x_n) + b\sum p_i$

$= a\,E(X) + b.$ இது போலவே $E(aX - b) = aE(X) - b$

விலக்கப் பெருக்கத் தொகை (Moments) : ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையைக் கணக்கிட கணித எதிர்பார்ப்பு பயன்படுகிறது. இங்கு இரண்டு வகையான விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைப் பற்றிக் காண்போம்.

(i) ஆதியைப் பொறுத்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகை,

(ii) சராசரியைப் பொறுத்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகை.

ஆதியைப் பொறுத்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

(Moments about the origin) :

X ஒரு தனி நிலை சமவாய்ப்பு மாறி எனில் ஒவ்வொரு மெய்யெண் r (r = 1, ...)க்கும் rவது விலக்கப் பெருக்கத் தொகை

$$\boxed{\mu_r' = E(X^r) = \sum p_i\,x_i^r}$$

முதல் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை : $\mu_1' = E(X) = \sum p_i\,x_i$

2வது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை : $\mu_2' = E(X^2) = \sum p_i\,x_i^2$

சராசரியைப் பொறுத்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

(Moments about the Mean) : (Central Moments)

X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில் ஒவ்வொரு மெய் எண் n, (n = 1, 2, ...) க்கும் nவது சராசரியைப் பொறுத்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\boxed{\mu_n = E(X - \overline{X}\,)^n = \sum(x_i - \overline{x}\,)^n\,p_i}$$

முதல் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை சராசரியைப் பொறுத்து

$$\mu_1 = E(X - \overline{X}\,)^1 = \sum(x_i - \overline{x}\,)^1\,p_i$$

$$\mu_1 = \sum x_i\,p_i - \overline{x}\sum p_i = \sum x_i\,p_i - \overline{x}\,(1) \quad \text{as} \quad \sum p_i = 1$$

$$= E(X) - E(X) = 0$$

கூட்டுச் சராசரியைப் பொறுத்த விலக்கங்களின் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

2வது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை சராசரியைப் பொறுத்து

$$\mu_2 = E(X - \overline{X}\,)^2$$

$= E(X^2 + \overline{X}^2 - 2 X \overline{X}) = E(X^2) + \overline{X}^2 - 2 \overline{X} E(X)$ ($\because \overline{X}$ ஒரு மாறிலி)

$= E(X^2) + [E(X)]^2 - 2E(X) E(X)$

$\mu_2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad = \mu_2' - (\mu_1')^2$

சராசரியைப் பொறுத்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகை சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் பரவற்படியாகும்

$$\boxed{\mu_2 = \text{Var}(X) = E(X - \overline{X})^2 = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

***முடிவு* (4) :** $\text{Var}(X \pm c) = \text{Var}(X)$ *இங்கு c மாறிலி*

நிரூபணம் : $\text{Var}(X) = E(X - \overline{X})^2$ என்பது தெரிந்ததே.

$$\text{Var}(X + c) = E[(X + c) - E(X + c)]^2$$

$$= E[X + c - E(X) - c]^2$$

$$= E[X - \overline{X}]^2 = \text{Var}(X)$$

இதுபோலவே, $\text{Var}(X - c) = \text{Var}(X)$

$\therefore$ *பரவற்படி ஆதியைச் சார்ந்ததல்ல என்பது தெளிவாகிறது.*

***முடிவு* (5) :** $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$

நிரூபணம் : $\text{Var}(aX) = E[aX - E(aX)]^2 = E[aX - aE(X)]^2$

$$= E[a \{X - E(X)\}]^2$$

$$= a^2 E[X - E(X)]^2 = a^2 \text{Var}(X)$$

$\therefore$ *அளவை மாற்றம் பரவற்படியைப் பாதிக்கும்.*

***முடிவு* (6) :** $\text{Var}(c) = 0$ *இங்கு c மாறிலி.*

நிரூபணம் : $\text{Var}(c) = E[c - E(c)]^2 = E[c - c]^2 = E(0) = 0$

எடுத்துக்காட்டு 10.11 : *இரு சீரான பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. பகடைகளின் மேல் உள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகையின் எதிர்பார்ப்பினைக் காண்க.*

தீர்வு : *இரு பகடைகளின் மேல் உள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகையை சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. இரு பகடைகளின் மேல் உள்ள எண்கள் 1 என அமைந்தால் கூடுதல் 2 ஆகும். இரு பகடைகளின் மேல் உள்ள எண்கள் 6 என அமைந்தால், கூடுதல் 12 ஆகும்.*

$\therefore$ *சமவாய்ப்பு மாறி 2இலிருந்து 12 வரை மதிப்புகளைப் பெறும்.*

(1, 1)
(1, 2) (2, 1)
(1, 3) (2, 2) (3, 1)
(1, 4) (2, 3) (3, 2) (4, 1)
(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)
(1, 6) (2, 5) (3, 4) (4, 3) (5, 2) (6, 1)
(2, 6) (3, 5) (4, 4) (5, 3) (6, 2)
(3, 6) (4, 5) (5, 4) (6, 3)
(4, 6) (5, 5) (6, 4)
(5, 6) (6, 5)
(6, 6)

∴ *நிகழ்தகவுப் பரவல் பின்வருமாறு :*

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X = x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = \sum p_i\ x_i = \sum x_i\ p_i$$

$$= \left(2 \times \frac{1}{36}\right) + \left(3 \times \frac{2}{26}\right) + \left(4 \times \frac{3}{36}\right) + \ .\ .\ .\ .+ \left(12 \times \frac{1}{36}\right) = \frac{252}{36} = 7$$

எடுத்துக்காட்டு 10.12 : *ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றியின் நிகழ்தகவு p மேலும் தோல்வியின் நிகழ்தகவு q எனில் முதல் வெற்றி பெற சோதனைகளின் எண்ணிக்கையின் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.*

தீர்வு: *முதல் வெற்றி பெற சோதனைகளின் எண்ணிக்கையை X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியால் குறிக்கலாம். முதல் சோதனையிலேயே வெற்றி கிடைக்கலாம். ∴ முதல் சோதனையில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு p. 2வது சோதனையில் வெற்றியெனில், முதல் சோதனையில் தோல்வியாக இருக்க வேண்டும். ∴ நிகழ்தகவு qp. 3வது சோதனையில் வெற்றியெனில், முதல் இரு சோதனைகளில் தோல்வியாக இருக்க வேண்டும். ∴ நிகழ்தகவு = q^2p. இதன்படி nவது சோதனையில் வெற்றியெனில் முதல் $(n-1)$ சோதனைகள் தோல்வியாக வேண்டும். ∴ நிகழ் தகவு = $q^{n-1}p$.*

∴ *நிகழ்தகவுப் பரவல் பின்வருமாறு :*

X	1	2	3	...	n ...
$P(x)$	p	qp	q^2p	...	$q^{n-1}\ p$...

$$\therefore E(X) = \sum p_i\ x_i$$

$$= 1\ .\ p + 2qp + 3q^2p + .\ .\ . + nq^{n-1}\ p\ .\ .$$

$$= p[1 + 2q + 3q^2 + . . .+ nq^{n-1} + ...]$$
$$= p[1 - q]^{-2} = p(p)^{-2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.13 : ஒரு கொள்கலனில் 4 வெள்ளையும் 3 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. திரும்ப வைக்குமாறு சமவாய்ப்பு முறையில் மூன்று முறை பந்துகளை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக எடுக்கும் போது கிடைக்கும் சிவப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க. மேலும் சராசரி, பரவற்படி ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு : தேவையான நிகழ்தகவுப் பரவல் பின்வருமாறு : (எடுத்துக்காட்டு 10.3 ஐ காண்க)

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{64}{343}$	$\frac{144}{343}$	$\frac{108}{343}$	$\frac{27}{343}$

சராசரி $E(X) = \sum p_i \ x_i$

$$= 0\left(\frac{64}{343}\right) + 1 \left(\frac{144}{343}\right) + 2\left(\frac{108}{343}\right) + 3\left(\frac{27}{343}\right) = \frac{9}{7}$$

$$E(X^2) = \sum p_i \ x_i^2$$

$$= 0\left(\frac{64}{343}\right) + 1^2\left(\frac{144}{343}\right) + 2^2\left(\frac{108}{343}\right) + 3^2\left(\frac{27}{343}\right) = \frac{117}{49}$$

பரவற்படி $= E(X^2) - [E(X)]^2$

$$\therefore V(X) = \frac{117}{49} - \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.14 : ஒரு சீரான பகடையை வைத்து ஒரு விளையாட்டு விளையாடப்படுகிறது. ஒருவருக்கு பகடையின் மேல் 2 விழுந்தால் ரூ,20 இலாபமும், பகடையின் மேல் 4 விழுந்தால் ரூ,40 இலாபமும், பகடையின் மேல் 6 விழுந்தால் ரூ. 30 இழப்பும் அடைகிறார். வேறு எந்த எண் விழுந்தாலும் இலாபமோ இழப்போ கிடையாது. அவர் அடையும் எதிர்பார்ப்பு யாது?

தீர்வு : கிடைக்கும் தொகையை சமவாய்ப்பு மாறி X என்க.

$\therefore$ X பெறும் மதிப்புகள் 20,40, – 30, 0 ஆகும்.

$$P[X = 20] = P(\text{பகடையின் மேல் 2 கிடைக்க}) = \frac{1}{6}$$

$$P[X = 40] = P(\text{பகடையின் மேல் 4 கிடைக்க}) = \frac{1}{6}$$

$$P[X = -30] = P(\text{பகடையின் மேல் 6 கிடைக்க}) = \frac{1}{6}$$

மீதி நிகழ்தகவு = 1/2

X	20	40	–30	0
$P(x)$	1/6	1/6	1/6	1/2

சராசரி $E(X) = \sum p_i \, x_i$

$$= 20\left(\frac{1}{6}\right) + 40\left(\frac{1}{6}\right) + (-30)\left(\frac{1}{6}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

எதிர்பார்க்கும் தொகை = ரூ. 5

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்ப்பு

(Expectation of a continuous Random Variable) :

வரையறை : $f(x)$ எனும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்ட ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியாக Xஐக் கொள்க. Xஇன் கணித எதிர்பார்ப்பு $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$

குறிப்பு : $\varphi(X)$ எனும் சமவாய்ப்பு மாறி என்பதற்கேற்ற சார்பு φ என்க. மற்றும் $E[\varphi(X)]$ உள்ளது எனில்

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\, dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

X-ன் பரவற்படி $= E(X^2) - [E(X)]^2$

முடிவுகள் : (1) $E(c) = c$ இங்கு c ஒரு மாறிலி

$$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c\, f(x)\, dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = c \qquad \left(\because \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \right)$$

(2) $E(aX \pm b) = a\,E(X) \pm b$

$$E(aX \pm b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax \pm b) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} ax\, f(x)\, dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} b\, f(x)\, dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \pm b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = a\,E(X) \pm b$$

எடுத்துக்காட்டு 10.15 : *தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & 0 < x < 2, \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில் சராசரியையும், பரவற்படியையும் காண்க.

தீர்வு :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^2 x.\frac{3}{4}x(2-x)\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\, dx = \frac{3}{4}\int_0^2 (2x^2 - x^3)\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}(8) - \frac{16}{4}\right] = 1$$

$\therefore$ *சராசரி* $= 1$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^2 x^2\frac{3}{4}x(2-x)\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 (2x^3 - x^4)\, dx = \frac{3}{4}\left[2\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{3}{4}\left[\frac{16}{2} - \frac{32}{5}\right] = \frac{6}{5}$$

பரவற்படி $= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$

எடுத்துக்காட்டு 10.16 : *பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பிற்கு சராசரியையும், பரவற்படியையும் காண்க.*

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & 0 < x < \infty \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

தீர்வு : $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x}\, dx = \frac{\lfloor n}{\alpha^{n+1}}$$

n *ஒரு மிகை எண்ணாக இருக்கும் போது.*

$$= \int_0^{\infty} x(3e^{-3x})\, dx = 3\int_0^{\infty} x\, e^{-3x}\, dx = 3.\frac{\lfloor 1}{3^2} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2(3e^{-3x})\, dx = 3\int_0^{\infty} x^2 e^{-3x}\, dx = 3\,.\frac{\lfloor 2}{3^3} = \frac{2}{9}$$

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$\therefore$ *சராசரி* $= \frac{1}{3}$; *பரவற்படி* $= \frac{1}{9}$

பயிற்சி 10.2

(1) ஒரு பகடை இருமுறை உருட்டப்படுகிறது. அதன் மேல் உள்ள எண் ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருத்தல் வெற்றியாகக் கருதப்படுகிறது. வெற்றியின் நிகழ்தகவுப் பரவலின் சராசரி மற்றும் பரவற்படியைக் காண்க.

(2) ஒரு பகடையை உருட்டும் போது கிடைக்கக்கூடிய எண்ணின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பென்ன?

(3) ஒரு நுழைவுத் தேர்வில் ஒரு மாணவன் எல்லா 120 கேள்விகளுக்கும் விடையளிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு கேள்விக்கும் நான்கு விடைகள் உள்ளன. ஒரு சரியான விடைக்கு 1 மதிப்பெண் பெறமுடியும். தவறான விடைக்கு 1/2 மதிப்பெண் இழக்க நேரிடும். ஒவ்வொரு கேள்விக்கும் சமவாய்ப்பு முறையில் விடையளித்தால் அம்மாணவன் பெறும் மதிப்பெண்ணின் எதிர்பார்ப்பு என்ன?

(4) நன்றாகக் கலைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுக்களடங்கிய சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரு சீட்டுகள் திரும்ப வைக்கும் முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. ஏஸ் (ace) சீட்டுகளின் எண்ணிக்கைக்கு சராசரியும், பரவற்படியும் காண்க.

(5) ஒரு சூதாட்ட விளையாட்டில் 3 நாணயங்களை ஒருமுறை சுண்டிவிடும் போது எல்லாம் 'தலைகளாகவோ' அல்லது எல்லாம் 'பூக்களாகவோ' விழுந்தால் ரூ, 10 இலாபமும், ஒன்று அல்லது இரண்டு தலைகளோ விழுந்தால் ரூ, 5 நஷ்டமும் அடைந்தால், அவர் அடையும் இலாபத்தின் எதிர்பார்ப்பு என்ன?

(6) ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது :

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.5	0.1

$Y = X^2 + 2X$ எனில் Yஇன் சராசரியையும் பரவற்படியையும் காண்க.

(7) கீழே தரப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புகளுக்கு சராசரியும், பரவற்படியும் காண்க.

(i) $f(x) = \begin{cases} 1/24 & -12 \le x \le 12 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$

10.4 அறிமுறை பரவல்கள் (Theoretical Distributions) :

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் சில நிகழ்தகவு விதிகட்கு உட்பட்டு கணக்கியலின்படி வெளிப்படும் போது கிடைக்கப் பெறும் நிகழ்தகவுப் பரவலே 'அறிமுறைப்' பரவலாகும். அறிமுறைப் பரவல்கள் முன் அனுபவங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டே உருவாக்கப்பட்டவை ஆகும். புள்ளியியலில் மிக முக்கியமாக பயன்படுத்தப்படும் பரவல்களான **(1)** ***ஈருறுப்புப் பரவல்* (2) *பாய்ஸான் பரவல்* (3) *இயல் நிலைப் பரவல்*** *ஆகியவற்றை இந்தப் பகுதியில் படிப்போம். இங்கு முதல் இரண்டு பரவல்களும் தனிநிலை நிகழ்தகவுப் பரவல்களாகும். மேலும் மூன்றாவது தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவலாகும்.*

தனிநிலை பரவல்கள் (Discrete Distributions)*:*

ஈருறுப்புப் பரவல்கள் (Binomial Distribution) :

இதனை ஸ்வீடன் நாட்டு கணித மேதை ஜேம்ஸ் பெர்னோலி (James Bernoulli) (1654–1705) *என்பவர் கண்டறிந்தார்.*

பெர்னோலியின் முயற்சிகள் :

இரண்டேயிரண்டு விளைவுகளுள்ள ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையை எடுத்துக் கொள்வோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டி விடும் போது, தலை விழுவதை வெற்றியாகவும், பூ விழுவதை தோல்வியாகவும் கொள்வோம். இந்த விளைவுகளின் நிகழ்தகவுகள் p *மற்றும்* q *எனவும்,* $p + q = 1$ *என இருக்குமாறும் எடுத்துக் கொள்வோம்.*

இரண்டு விளைவுகளுடன் கூடிய சோதனை 'n*' தடவைகள் (சார்பற்றவையாக இருக்குமாறு) நடக்குமானால் அவை பெர்னோலியன் முயற்சிகள் எனப்படும். ஈருறுப்புப் பரவல் விதியை கீழ்க்கண்ட நிலைகளில் பயன்படுத்த வேண்டும்.*

(i) *எந்த ஒரு முயற்சியிலும் வெற்றி அல்லது தோல்வி இரண்டில் ஒன்று நிகழ்ந்தே ஆக வேண்டும்.*

(ii) *முயற்சிகள் சார்பற்றனவாயும் எண்ணிடத்தக்கனவாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.*

(iii) *வெற்றியின் நிகழ்தகவு* p*, முயற்சிக்கு முயற்சி மாறுபடாமல் இருத்தல் வேண்டும்.*

ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு :

n *ஒரு மிகை எண் என்க. மேலும்* p *என்பது,* $0 \le p \le 1$ *என்று இருக்குமாறு உள்ள மெய் எண். மேலும்* $q = 1 - p$ *என்க. நிகழ்தகவுப் பரவல் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.*

x_i	0	1	2	. . .	n
$P(x_i)$	q^n	$nc_1 pq^{n-1}$	$nc_2\, p^2 q^{n-2}$	. . .	p^n

மேற்காணும் பட்டியல் ஈருறுப்புப் பரவலைக் குறிக்கின்றது. அட்டவணையின் 2வது நிரல் ஈருறுப்புப் பரவல் $(q + p)^n$ விரிவின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளாகும்.

ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுப் பரவல் $B(n,p,x)$, 'n' பெர்னோலியன் முயற்சிகளில் சரியாக x வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவைத் தருகின்றது. இங்கு 'p' ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் அடையும் வெற்றியின் நிகழ்தகவு ஆகும். n, p ஆகிய மாறிலிகள் பரவலின் பண்பளவைகள் ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் வரையறை :

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

$$P(X = x) = p(x) = \begin{cases} nC_x\, p^x\, q^{n-x} & x = 0, 1, \ldots n \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில் சமவாய்ப்பு Xஆனது ஈருறுப்புப் பரவலை பின்பற்றுகிறது.

ஈருறுப்புப் பரவலின் மாறிலிகள் :

$$\text{சராசரி} = np$$

$$\text{பரவற்படி} = npq$$

$$\text{திட்ட விலக்கம்} = \sqrt{\text{பரவற்படி}} = \sqrt{npq}$$

$X \sim B(n, p)$ எனில், சமவாய்ப்பு மாறி X, ஈருறுப்புப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது என்று பொருள்.

குறிப்பு : ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி அதன் பரவற்படியை விட எப்பொழுதும் மிகையாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.17 : ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் மாறி X-ன் சராசரி 2, திட்ட விலக்கம் $\frac{2}{\sqrt{3}}$ எனில், நிகழ்தகவுச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$np = 2 \quad ; \sqrt{npq} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore npq = 4/3$$

$$\therefore q = \frac{npq}{np} = \frac{4/3}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore p = 1 - q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$np = 2 \quad \therefore \quad n\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \Rightarrow n = 6$$

$\therefore$ பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு

$$P[X = x] = 6C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}, x = 0, 1, 2, \quad \ldots 6 \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.18 : *ஒரு ஜோடிப் பகடைகள்* 10 *முறை உருட்டப்படுகின்றன. இரு பகடைகளும் ஒரே எண் காட்டுவதை வெற்றி எனக் கொண்டால்* (i) 4 *வெற்றிகள்* (ii) *பூச்சிய வெற்றி* – *இவற்றின் நிகழ்தகவு காண்க.*

தீர்வு : $n = 10$. *இரு பகடைகளும் ஒரே எண் காட்ட வேண்டுமெனில்*
{(1,1), (2,2) (3,3), (4,4), (5,5) (6,6)} *(அ.து.),* 6 *வழிகள்.*

இரு பகடைகளும் ஒரே எண் காட்டுவதே வெற்றி.

$$\therefore\ p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\ ;\ q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

சமவாய்ப்பு மாறி X *வெற்றியின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கட்டும்.*

$$P[X = x] = nC_x\ p^x\ q^{n-x}$$

(a) P(4 *வெற்றிகள்*) $= P[X = 4] = 10C_4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6$

$$= \frac{210 \times 5^6}{6^{10}} = \frac{35}{216}\left(\frac{5}{6}\right)^6$$

(b) P (*பூச்சிய வெற்றி*) $= P(X = 0)$

$$= 10C_0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.19 :

ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலில் $n = 5$ *மற்றும்* $P(X = 3) = 2P(X = 2)$ *எனில்* p*இன் மதிப்பு காண்.*

தீர்வு :

$$P(X = x) = nC_x\ p^x\ q^{n-x}$$

$$P(X = 3) = 5C_3\, p^3q^2\ ;\ P(X = 2) = 5C_2\, p^2q^3$$

$$\therefore\ 5C_3\ p^3q^2 = 2\left(5C_2\ p^2q^3\right)$$

$$\therefore\ p = 2q$$

$$p = 2(1 - p) \Rightarrow 3p = 2\ ;\ p = \frac{2}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.20 : 5 *முயற்சிகளுள்ள, ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி மற்றும் பரவற்படியின் கூடுதல்* 4.8 *எனில் பரவலைக் காண்க.*

தீர்வு :

$$np + npq = 4.8 \Rightarrow np(1 + q) = 4.8$$

$$5\,p\,[1 + (1 - p) = 4.8$$

$$p^2 - 2p + 0.96 = 0 \Rightarrow p = 1.2\ ,\ 0.8$$

$\therefore\ p = 0.8\ ;\ q = 0.2$ [ஏனெனில் $p > 1$ஆக இருக்க முடியாது]

$\therefore\ p[X = x] = 5_{C_x}\,(0.8)^x\,(0.2)^{5-x}$, x = 0லிருந்து 5 வரை.

எடுத்துக்காட்டு 10.21 : ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி மற்றும் பரவற்படியின் வித்தியாசம் 1 ஆகும். மேலும் அவற்றின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் 11 எனில் nஇன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : ஈருறுப்புப் பரவலில், சராசரி, பரவற்படியை விட பெரிது ஆதலால், சராசரி = $m + 1$ என்றும் பரவற்படி = m எனவும் கொள்க.

$$(m+1)^2 - m^2 = 11 \Rightarrow m = 5$$

$$\therefore\ \text{சராசரி} = m + 1 = 6$$

$$\Rightarrow np = 6\ ;\ npq = 5 \quad \therefore\ q = \frac{5}{6},\ p = \frac{1}{6} \Rightarrow n = 36.$$

பயிற்சி 10.3

(1) "ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 6, மற்றும் திட்ட விலக்கம் 3". இக்கூற்று மெய்யா அல்லது தவறா? விவரி.

(2) ஒரு பகடை 120 முறை உருட்டப்படுகிறது. பகடையின் மேல் 1 அல்லது 5 கிடைப்பது வெற்றியெனக் கொள்ளப்படுகிறது. கிடைக்கும் வெற்றியின் எண்ணிக்கையின் சராசரி, பரவற்படி காண்க.

(3) ஒரு துறைமுகத்தில் சராசரியாக 10 கப்பல்களில் ஒரு கப்பல் பத்திரமாகத் திரும்புவதில்லை. 500 கப்பல்களில், பத்திரமாகத் திரும்பி வரும் கப்பல்களின் சராசரியையும், பரவற்படியையும் காண்க.

(4) ஒரே சமயத்தில் 4 நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன. (*a*) சரியாக 2 தலைகள் (*b*) குறைந்தபட்சம் 2 தலைகள் (*c*) அதிகபட்சம் 2 தலைகள் கிடைக்க நிகழ்தகவு காண்க.

(5) ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வில், தேர்ச்சி பெற்றவர்களின் சதவீதம் 80 ஆகும். 6 நபர்கள் தேர்வு எழுதினால், குறைந்தபட்சம் 5 நபர்கள் தேர்ச்சி பெற நிகழ்தகவு காண்க.

(6) ஒரு தடை தாண்டுதல் பந்தயத்தில் ஒரு விளையாட்டு வீரர் 10 தடைகளைத் தாண்ட வேண்டும். ஒருவர் ஒவ்வொரு தடையைத் தாண்டுவதின் நிகழ்தகவு $\frac{5}{6}$ எனில், அவர் இரண்டிற்கும் குறைவான தடைகளை வீழ்த்துவதின் நிகழ்தகவு காண்க.

10.4.2 பாய்ஸான் பரவல் (Poisson Distribution) :

இது பிரெஞ்சு கணித மேதை சைமன் டெனிஸ் பாய்ஸான் (Simeon Denis Poisson)(1781 – 1840) என்பவரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. பாய்ஸான் பரவலும் ஒரு தனிநிலைப் பரவலாகும்.

பாய்ஸான் பரவல், ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாக பின்வரும் நிபந்தனைகளினால் பெறப்படுகின்றது.

(i) *முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை* n *மிகவும் அதிகமானது. (அ.து.),* $n \to \infty$.

(ii) *ஒவ்வொரு முயற்சிக்கும் வெற்றியின் நிலையான நிகழ்தகவு* p *மிகச் சிறியது. (அ.து.),* $p \to 0$.

(iii) $np = \lambda$ *என்ற ஒரு முடிவுறு எண். இங்கு* λ *ஒரு மிகை மெய்யெண். அரிதாக நடக்கும் நிகழ்ச்சியின் பரவலே, பாய்ஸான் பரவலைத் தழுவுகிறது என்கிறோம்.*

வரையறை: *ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி* X*, பாய்ஸான் பரவலில் அமையும்பொழுது,*

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{\lfloor x}, \; x = 0,1,2, \ldots$$

மேலும் $\lambda > 0$ *ஆகும்.*

பாய்ஸான் பரவலின் சராசரி λ *ஆகும். மேலும் பரவற்படியும்* λ *ஆகும்.*

பாய்ஸான் பரவலின் பண்பளவை λ *ஆகும்.*

பாய்ஸான் பரவலின் எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) *ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் ஒரு கதிரியக்கப் பொருளிலிருந்து உமிழப்படும் ஆல்ஃபா துகள்களின் எண்ணிக்கை.*

(2) *ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில், ஒரு தொலைபேசி தொடர்பகம் பெறும் தொலைபேசி அழைப்புகள்.*

(3) *ஒரு நல்ல தொழிற்சாலையில் உருவாக்கும் பொருட்களில்,* 100 *பொருட்கள் உள்ள கட்டில் இருக்கும் குறையுள்ள பொருட்கள்.*

(4) *ஒரு நல்ல பதிப்பகத்தில் அச்சாகும் புத்தகத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் ஏற்படும் அச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை.*

(5) *ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில், ஒரு குறிப்பிட்ட சாலை சந்திப்பில் ஏற்படும் சாலை விபத்துகளின் எண்ணிக்கை.*

எடுத்துக்காட்டு 10.22 : *நிகழ்தகவின் கூடுதல் ஒன்று என நிறுவுக.*

தீர்வு :

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{\lfloor x} = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{0}}{\lfloor 0} + \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{1}}{\lfloor 1} + \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{2}}{\lfloor 2} + \ldots$$

$$= e^{-\lambda}\left[1 + \lambda + \frac{\lambda^{2}}{\lfloor 2} + \ldots\right] = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^{0} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 10.23 : *தொழிற்கல்வி அல்லாத புத்தகங்களை வெளியிடும் பதிப்பகம், அச்சுப்பிழை இல்லாதவாறு புத்தகங்களை வெளியிடும் பொருட்டு ஒரு பக்கத்தில் ஏற்படும் குறைந்தபட்சம் ஒரு அச்சுப் பிழையின் நிகழ்தகவு* 0.005 *எனக் கொண்டிருக்கிறது. மேலும் பக்கத்திற்குப் பக்கம் ஏற்படும் அச்சுப்பிழைகள் சார்பற்றவை எனில்* (i) 400 *பக்க நாவலில் சரியாக ஒரு பக்கத்தில் பிழை ஏற்பட* (ii) *அதிகபட்சம்* 3 *பக்கங்களில் பிழைகள் ஏற்பட நிகழ்தகவு காண்க.*
$[e^{-2} = 0.1353 \;;\; e^{-0.2} = 0.819]$.

தீர்வு : $n = 400 \;,\; p = 0.005$

$$\therefore\; np = 2 = \lambda$$

(i) P(1 *பக்கத்தில் பிழை இருக்க*) $= P(X = 1)$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{\lfloor 1} = \frac{e^{-2}2^1}{\lfloor 1} = 0.1363 \times 2 = 0.2726$$

(ii) P(*அதிகபட்சம்* 3*பக்கங்களில் பிழை இருக்க*) $= P(X \le 3)$

$$= \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{\lfloor x} = \sum_{0}^{3} \frac{e^{-2}(2)^x}{\lfloor x} = e^{-2}\left[1 + \frac{2}{\lfloor 1} + \frac{2^2}{\lfloor 2} + \frac{2^3}{\lfloor 3}\right]$$

$$= e^{-2}\left(\frac{19}{3}\right) = 0.8569$$

எடுத்துக்காட்டு 10.24 : *ஒரு தடுப்பு ஊசியின் பக்க விளைவால் பாதிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு* 0.005 *ஆகும்.* 1000 *நபர்களுக்கு தடுப்பு ஊசி போடும் பொழுது* (i) *அதிகபட்சம்* 1 *நபர் பாதிக்கப்பட* ii) 4, 5 *அல்லது* 6 *நபர்கள் பாதிக்கப்பட நிகழ்தகவு காண்க.* $[e^{-5} = 0.0067]$

தீர்வு : *பக்க விளைவால் பாதிக்கப்படுவதின் நிகழ்தகவை* p *என்க.*

$$n = 1000 \;,\; p = 0.005 \;,\; \lambda = np = 5.$$

(i) P(*அதிகபட்சம்*1*நபர் பாதிக்கப்பட*) $= P(X \le 1)$

$$= P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{\lfloor 0} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{\lfloor 1} = e^{-\lambda}[1 + \lambda]$$

$$= e^{-5}(1 + 5) = 6 \times e^{-5}$$

$$= 6 \times 0.0067 = 0.0402$$

(ii) P(4, 5 *அல்லது* 6 *நபர் பாதிக்கப்பட*) $= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^4}{\lfloor 4} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^5}{\lfloor 5} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^6}{\lfloor 6} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^4}{\lfloor 4}\left[1 + \frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda^2}{30}\right]$$

$$= \frac{e^{-5}\,5^4}{24}\left[1 + \frac{5}{5} + \frac{25}{30}\right] = \frac{e^{-5}\,5^4}{24}\left[\frac{17}{6}\right] = \frac{10625}{144} \times 0.0067$$

$$= 0.4944$$

எடுத்துக்காட்டு 10.25 : *ஒரு பாய்ஸான் பரவலில்* $P(X = 2) = P(X = 3)$ *எனில்* $P(X = 5)$*ஐ காண்க.* $[e^{-3} = 0.050]$.

தீர்வு : $P(X = 2) = P(X = 3)$ *கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.*

$$\therefore \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^2}{\lfloor 2} = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^3}{\lfloor 3}$$

$$\Rightarrow 3\lambda^2 = \lambda^3$$

$$\Rightarrow \lambda^2\,(3 - \lambda) = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = 3 \quad \because \lambda \neq 0$$

$$P(X = 5) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^5}{\lfloor 5} = \frac{e^{-3}\,(3)^5}{\lfloor 5} = \frac{0.050 \times 243}{120} = 0.101$$

எடுத்துக்காட்டு 10.26 : *ஒரு பேருந்து நிலையத்தில், ஒரு நிமிடத்திற்கு உள்ளே வரும் பேருந்துகளின் எண்ணிக்கை பாய்ஸான் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது எனில்,* $\lambda = 0.9$ *எனக் கொண்டு,*

(i) 5 *நிமிட கால இடைவெளியில் சரியாக* 9 *பேருந்துகள் உள்ளே வர*

(ii) 8 *நிமிட கால இடைவெளியில்* 10*க்கும் குறைவாக பேருந்துகள் உள்ளே வர*

(iii) 11 *நிமிட கால இடைவெளியில் குறைந்தபட்சம்* 14 *பேருந்துகள் உள்ளே வர, நிகழ்தகவு காண்க.*

தீர்வு :

(i) $\left.\begin{array}{r}\text{ஒரு நிமிடத்தில் உள்ளே}\\ \text{வரும் பேருந்துகளுக்கான } \lambda\end{array}\right\} = 0.9$

$\left.\begin{array}{r}\therefore 5 \therefore \text{நிமிடங்களில் உள்ளே}\\ \text{வரும் பேருந்துகளுக்கான } \lambda\end{array}\right\} = 0.9 \times 5 = 4.5$

$\left.\begin{array}{r}P \text{ சரியாக 9 பேருந்துகள்}\\ \text{உள்ளே வர}\end{array}\right\} = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^9}{\lfloor 9}$

(அ.து.), $P(X = 9) = \dfrac{e^{-4.5} \times (4.5)^9}{\lfloor 9}$

(ii) $\left.\begin{array}{r}\text{P(8 நிமிடங்களில் 10}\\ \text{பேருந்துகளுக்குக்}\\ \text{குறைவாக உள்ளே வர)}\end{array}\right\} = P(X < 10)$

$$\text{இங்கு } \lambda = 0.9 \times 8 = 7.2$$

$$\therefore \text{ தேவையான நிகழ்தகவு } = \sum_{x=0}^{9} \frac{e^{-7.2} \times (7.2)^x}{\lfloor x}$$

(iii) P (11 நிமிடங்களில் குறைந்தபட்சம் 14 பேருந்துகள் உள்ளே வர) $= P(X \geq 14) = 1 - P(X < 14)$

$$\text{இங்கு } \lambda = 11 \times 0.9 = 9.9$$

$$\therefore \text{ தேவையான நிகழ் தகவு } = 1 - \sum_{x=0}^{13} \frac{e^{-9.9} \times (9.9)^x}{\lfloor x}$$

(இதே நிலையில் விடைகளை நிறுத்தி விடலாம்).

பயிற்சி 10.4

(1) ஒரு பாய்ஸான் மாறி X-ன் சராசரி 4 ஆகும். (i) $P(X \leq 3)$ (ii) $P(2 \leq X < 5)$ காண்க. $[e^{-4} = 0.0183]$.

(2) ஒரு தொழிற்சாலையில், 200 மின் இணைப்பான் உள்ள ஒரு பெட்டியில் 2% குறையுள்ள மின் இணைப்பான்கள் உள்ளன. (i) சரியாக 4 மின் இணைப்பான்கள் குறையுள்ளவையாக இருக்க (ii) 3க்கு மேல் குறையுடையவையாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க. $[e^{-4} = 0.0183]$.

(3) ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியாகும் தாழ்ப்பாள்களில் 20% குறையுடையவையாக உள்ளன.10 தாழ்ப்பாள்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் போது சரியாக 2 தாழ்ப்பாள்கள் குறையுடையவையாக இருக்க (i) ஈருப்புப் பரவல் (ii) பாய்ஸான் பரவல் மூலமாக நிகழ்தகவு காண்க. $[e^{-2} = 0.1353]$.

(4) ஒரு கதிரியக்கப் பொருளிலிருந்து ஆல்ஃபா துகள்கள் சராசரியாக 20 நிமிட கால இடைவெளியில் 5 என உமிழப்படுகிறது. பாய்ஸான் பரவலைப் பயன்படுத்தி குறிப்பிட்ட 20 நிமிட இடைவெளியில் (i) 2 உமிழல்கள் (ii) குறைந்தபட்சம் 2 உமிழல்களுக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. $[e^{-5} = 0.0067]$.

(5) ஒரு நகரத்தில் வாடகை வண்டி ஓட்டுனர்களால் ஏற்படும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கை பாய்ஸான் பரவலை ஒத்திருக்கிறது. இதன் பண்பளவை 3 எனில், 1000 ஓட்டுநர்களில் (i) ஒரு வருடத்தில் ஒரு விபத்தும் ஏற்படாமல் (ii) ஒரு வருடத்தில் மூன்று விபத்துகளுக்கு மேல் ஏற்படுத்தும் ஓட்டுனர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. $[e^{-3} = 0.0498]$

10.4.3 இயல்நிலைப் பரவல் (Normal Distribution) :

மேலே விவரிக்கப்பட்ட ஈருறுப்பு மேலும் பாய்ஸான் பரவல்கள், தனி நிலை மாறிக்கான அறிமுறைப் பரவல்களில் மிகவும் பயனுள்ள பரவல்களாகும். (அ.து.) இவை தனித்தனியாக நிகழும் நிகழ்ச்சிகளுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளன. மேலும் நமக்கு பல நேரங்களில் தொடர்ந்து மாறிக் கொண்டிருக்கும் அளவைகளுக்கும் பொருந்தும்படியாக ஒரு தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவல் அவசியமாகிறது. இவ்வகையில் இயல்நிலைப் பரவல் இங்கு அறிமுகப்படுத்தப்படுகிறது. இயல்நிலைப் பரவலை, இயல்நிலை நிகழ்தகவுப் பரவல் எனவும் அழைக்கலாம். தொடர்ந்து மாறிக் கொண்டிருக்கும் மாறிகளுக்கு இது மிகவும் பயனுள்ள பரவலாகும். வணிகம் மற்றும் பொருளாதார கணக்குகளின் புள்ளி விவரங்கள், இயல்நிலைப் பரவல் வாயிலாக வெளிப்படுத்தப்படுகின்றன. இயல்நிலைப் பரவல், நவீனப் புள்ளியியலின் (நவீன) 'அஸ்திவாரக் கல்' ஆகும்.

பாய்ஸான் பரவலைப் போலவே, இயல்நிலைப் பரவல், ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாகக் கருதப்படுகிறது. nஇன் மிகப்பெரிய மதிப்புகட்கு, p அல்லது q மிகச்சிறியனவாக இல்லாத போது (அ.து.), பூச்சியத்திற்கு அருகில் இல்லாத போது, ஒரு ஈருறுப்புப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலின் தோராயமாக அமைகிறது. ஈருறுப்புப் பரவல் ஒரு தனிநிலைப் பரவலாகவும் இயல்நிலைப் பரவல் ஒரு தொடர்நிகழ்தகவுப் பரவலாக இருப்பினும் இந்த நெருக்கம் சாத்தியமாகிறது. அறிவியல் சோதனைகளில் அளக்கும் பொழுது ஏற்படும் பிழைகள், அழிந்து போன தாவரங்களின் ஆன்த்ரோ பெமெட்ரிக் அளவுகள், அறிவுக்கூர்மை மற்றும் திறனாய்வு அளவுகள், பலதரப்பட்ட சோதனைகளின் மதிப்புகள் மேலும் எண்ணற்ற பொருளாதார விளைவுகள் இயல்நிலை பரவலைப் பெற்றிருக்கும்.

வரையறை **:** *X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி μ, σ என்ற பண்பளவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலை சார்ந்திருக்க வேண்டுமாயின், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \; -\infty < x < \infty,\; -\infty < \mu < \infty,\; \sigma > 0.$$

என இருத்தல் வேண்டும். பண்பளவைகளை μ மற்றும் σ^2 எனவும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$X \sim N(\mu, \sigma)$ எனில் சமவாய்ப்பு மாறி X, சராசரி μ மற்றும் திட்ட விலக்கம் σஉடன் கூடிய இயல்நிலைப் பரவலை அமைக்கிறது எனலாம்.

குறிப்பு : இயல்நிலைப் பரவலை $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனவும் குறிக்கலாம். இதில் பண்பளவைகள் சராசரியும், பரவற்படியும் ஆகும்.

இயல்நிலைப் பரவலை காஸியன் பரவல் (Gaussian Distribution) என்றும் அழைக்கலாம். டி-மாய்வர் (De-Moivre) (1667 – 1754) எனும் கணித மேதை 1733இல் ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை நிலை, இயல்நிலைப் பரவல் என்று கண்டறிந்தார். 1744இல் லாப்லாஸ் (Laplace) இதனைக் கண்டறிந்தார். ஆனால் ஒரு சில வரலாற்றுப் பிழைகளால் காஸ் (Gauss) என்ற கணித மேதை 1809இல் இதைப்பற்றி முதன்மையாக அறிவித்ததற்கே அனைத்துப் பெருமையும் அவரையே சேருகிறது.

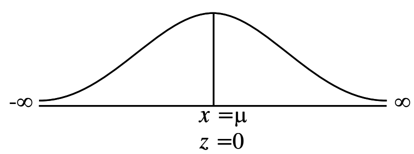
***இயல்நிலைப் பரவலின் மாறிகள்* (Constants of Normal distribution) :**

சராசரி = μ

பரவற்படி = σ^2

திட்ட விலக்கம் = σ

இயல்நிலை பரவலின் வளைவரை படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 10.3

***இயல்நிலைப் பரவலின் பண்புகள்* (Properties of Normal Distribution) :**

(1) இயல்நிலைப் பரவலின் வளைவு மணி வடிவம் கொண்டது.

(2) $X = \mu$ என்ற சராசரி கோட்டிற்கு இயல்நிலை வளைவரை சமச்சீரானது.

(3) சராசரி = இடைநிலை அளவு = முகடு = μ

(4) இயல்நிலைப் பரவலின் உயரம் $X = \mu$ என்ற புள்ளியில் மீப்பெருமதிப்பை அடைகிறது. (அ.து.) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ பெரும நிகழ்தகவு ஆகும்.

(5) இதற்கு ஒரே ஒரு முகடுதான் உண்டு. இயல்நிலைப் பரவல் ஒரு முகட்டுப் பரவல் ஆகும். அது $X = \mu$ல் உள்ளது.

(6) இயல்நிலை வளைவுக்கு அடிக்கோடு தொலைத் தொடுகோடாக அமைகிறது.

(7) $X = \mu \pm \sigma$வில் இதற்கு வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள் உள்ளன.

(8) $X = \mu$ என்ற கோட்டிற்கு இருபுறமும் சமச்சீராக உள்ளதால், கோட்டக் கெழு பூச்சியமாகும்.

(9) பரப்புப் பண்புகள் :

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$

(10) *முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை* n *மிகப் பெரிய எண்ணாகவும், வெற்றியின் நிகழ்தகவு* p, 1/2*க்கு அருகிலும் அமையும் போது ((அ.து.), (*p, q *மிகச்சிறியனவாக இல்லாத போது) இயல்நிலைப் பரவல் ஈறுருப்பு பரவலின் தோராய மதிப்பை அடைகிறது.*

(11) $\lambda \to \infty$ *எனில் பாய்ஸான் பரவல், இயல்நிலைப் பரவலை நோக்கிச் செல்கிறது.*

திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் **(Standard Normal Distribution) :**

சராசரி பூச்சியமாகவும், திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பு 1 *ஆகவும் இருப்பின் சமவாய்ப்பு மாறி, திட்ட இயல்நிலை மாறி என அழைக்கப்படுகிறது.*

சராசரி μ *எனவும் திட்ட விலக்கம்* σ *எனவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலை திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாக மாற்ற ஆதியையும் அளவையையும் மாற்ற வேண்டும்.*

x *அளவையிலிருந்து* z *அளவைக்கு மாற்ற கீழ்க்காணும் சூத்திரம் பயன்படுகிறது.* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

திட்ட இயல்நிலை மாறி Z*இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு*

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad ; \ -\infty < z < \infty \text{ ஆகும்.}$$

இந்த பரவலுக்கு பண்பளவைகள் கிடையாது. திட்ட இயல்நிலைப் பரவலை $N(0,1)$ *எனக் குறிக்கிறோம்.*

இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவின் கீழ் மொத்தப் பரப்பு ஒன்று.

$$\text{i.e.,} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1 \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{0} \varphi(z)dz = \int_{0}^{\infty} \varphi(z)dz = 0.5$$

இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்பளவுப் பண்பு

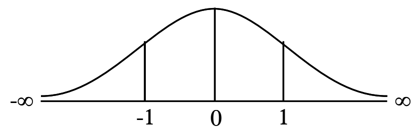
(Area Property of Normal Distribution) :

X *என்ற சமவாய்ப்பு மாறி* $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ *என்ற இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிபந்தனை*

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\,dx$$

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *வில்* $X = \mu - \sigma$ *மற்றும்* $X = \mu + \sigma$ *எனப் பிரதியிட,*

$$P(-1 < Z < 1) = \int_{-1}^{1} \varphi(z)dz$$



படம் 10.4

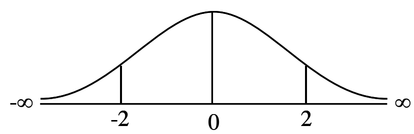
$$= 2\int_{0}^{1} \varphi(z)dz \quad (\because \text{ சமச்சீர் பண்பு})$$

$$= 2 \times 0.3413, \quad (\text{பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து})$$

$$= 0.6826$$

மேலும் $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$

$$= \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)\, dx$$



$$P(-2 < Z < 2) = \int_{-2}^{2} \varphi(z)dz$$

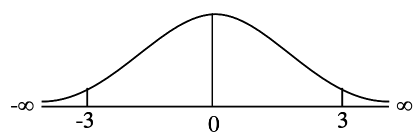
படம் 10.5

$$= 2\int_{0}^{2} \varphi(z)dz\,, \quad (\text{சமச்சீர் பண்பு})$$

$$= 2 \times 0.4772 = 0.9544$$

இதுபோல் $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

$$= \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)\, dx = \int_{-3}^{3} \varphi(z)dz$$



$$= 2 \times 0.49865 = 0.9973$$

படம் 10.6

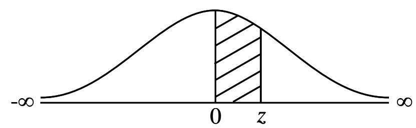
ஆதலால், X என்ற இயல்நிலை மாறி $\mu \pm 3\sigma$ என்ற இடைவெளிக்கு வெளியே அமைய நிகழ் தகவு

$$P(|X - \mu| > 3\sigma) = P(|Z| > 3) = 1 - P(-3 < Z < 3) = 1 - 0.9973 = 0.0027$$

குறிப்பு :

இயல்நிலை வளைவரைக்குக் கீழ் அமையும் பரப்புகள், திட்ட இயல்நிலை மாறி Zஐப் பொறுத்து கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், எந்த ஒரு கணக்கிலும் X மாறியை முதலில் Z மாறியாக மாற்ற வேண்டும். அட்டவணையில் சராசரியிலிருந்து ($Z = 0$) எந்த ஒரு Z மதிப்பிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பளவைக் காண இயலும்,

இயல்நிலை வளைவரை சமச்சீருடையது. ஆதலால் zஇன் குறை எண்ணிற்காகத் தனி அட்டவணை தேவையில்லை. எடுத்துக்காட்டாக,



படம் 10.7

$P(0 \le Z \le 1.2) = P(-1.2 \le Z \le 0)$

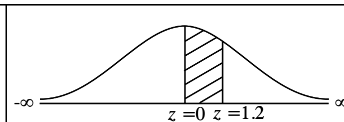
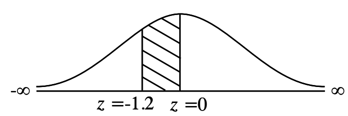
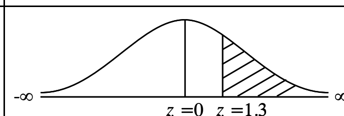
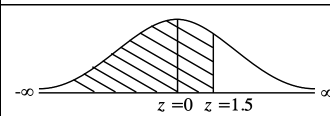
எடுத்துக்காட்டு 10.27 : *Z ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறி என்க. கீழ்க்கண்டவைகளுக்கு நிகழ்தகவு காண்க.*

(i) $P(0 \le Z \le 1.2)$ (ii) $P(-1.2 \le Z \le 0)$

(iii) Z = 1.3க்கு வலப்பக்கப் பரப்பு (iv) Z = 1.5க்கு இடப்பக்கப் பரப்பு

(v) $P(-1.2 \le Z \le 2.5)$ (vi) $P(-1.2 \le Z \le -0.5)$ (vii) $P(1.5 \le Z \le 2.5)$

தீர்வு :

(i) $P(0 \le Z \le 1.2)$ $P(0 \le Z \le 1.2)$ = (Z = 0இலிருந்து Z = 1.2 வரை உள்ள பரப்பு) = 0.3849	 படம் 10.8
(ii) $P(-1.2 \le Z \le 0)$ $P(-1.2 \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le 1.2)$ = 0.3849 (சமச்சீர் பண்பு)	 படம் 10.9
(iii) Z = 1.3க்கு வலப்பக்கமுள்ள பரப்பு P(Z > 1.3) = (Z = 0இலிருந்து Z = ∞ வரை உள்ள பரப்பு) – (Z = 0இலிருந்து Z = 1.3 வரை உள்ள பரப்பு) $= P(0 < Z < \infty) - P(0 \le Z < 1.3)$ = 0.5 – 0.4032 = 0.0968	 படம் 10.10
(iv) Z = 1.5க்கு இடப்பக்கமுள்ள பரப்பு $= P(Z < 1.5)$ $= P(-\infty < Z < 0) + P(0 \le Z < 1.5)$ = 0.5 + 0.4332 = 0.9332	 படம் 10.11

(v) $P(-1.2 \leq Z < 2.5)$

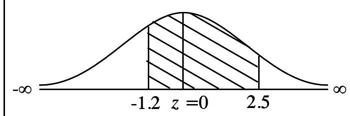
$= P(-1.2 < Z < 0) + P(0 < Z < 2.5)$

$= P(0 \leq Z < 1.2) + P(0 \leq Z \leq 2.5)$

[சமச்சீர் பண்பு]

$= 0.3849 + 0.4938$

$= 0.8787$



படம் 10.12

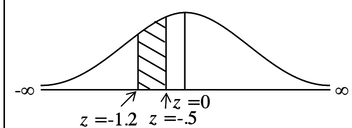
(vi) $P(-1.2 \leq Z \leq -0.5)$

$= P(-1.2 < Z < 0) - P(-0.5 < Z < 0)$

$= P(0 < Z < 1.2) - P(0 < Z < 0.5)$

[சமச்சீர் பண்பு]

$= 0.3849 - 0.1915 = 0.1934$



படம் 10.13

(vii) $P(1.5 \leq Z \leq 2.5)$

தேவையான பரப்பு

$= P(0 \leq Z \leq 2.5) - P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4938 - 0.4332 = 0.0606$

எடுத்துக்காட்டு 10.28 : *Z ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறி என்க. கீழ்க்காணும் கணக்குகளில் c இன் மதிப்பு காண்க.*

(i) $P(Z < c) = 0.05$ (ii) $P(-c < Z < c) = 0.94$

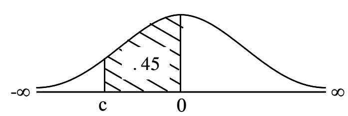
(iii) $P(Z > c) = 0.05$ (iv) $P(c < Z < 0) = 0.31$

தீர்வு :

(i) $P(Z < c) = 0.05$ i.e., $P(-\infty < Z < c) = 0.05$

பரப்பு < 0.5, *ஆதலால்* $Z = 0$*விற்கு இடப்புறம்* c *அமைகிறது.*

பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து, பரப்பு 0.45*க்கு உண்டான* Z *மதிப்பு* 1.65.



படம் 10.14

$\therefore c = -1.65$

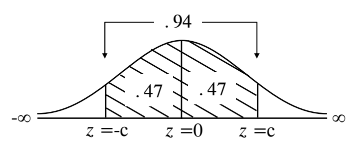
(ii) $P(-c < Z < c) = 0.94$

$Z = 0$*க்கு இருபுறமும்* $Z = -c$*யும்* $Z = +c$*யும் சமதூரத்தில் அமைந்துள்ளன.*

$\therefore \quad P(0 < Z < c) = \frac{0.94}{2} = 0.47.$

பரப்பு 0.47*க்கு உண்டான* Z *மதிப்பு பரப்பு அட்டவணையிலி* 1.88 *ஆகும்.*

$\therefore \; c = 1.88$ *மற்றும்* $-c = -1.88$

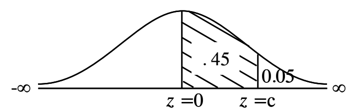


படம் 10.15

(iii) $P(Z > c) = 0.05 \Rightarrow P(c < Z < \infty) = 0.05$

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து, Z = 0க்கு வலப்புறம் c அமைகிறது.

$Z = 0$க்கு வலப்புறமுள்ள பரப்பு = 0.5



படம் *10.16*

$$P(0 < Z < \infty) - P(0 < Z < c) = 0.05$$
$$0.5 - P(0 < Z < c) = 0.05$$
$$\therefore\ 0.5 - 0.05 = P(0 < Z < c)$$
$$0.45 = P(0 < Z < c)$$

பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து 0.45க்கு உண்டான Zஇன் மதிப்பு 1.65 ஆகும். $\therefore\ c = 1.65$

(iv) $P(c < Z < 0) = 0.31$

cஇன் மதிப்பு பூச்சியத்துக்கு குறைவாக இருப்பதால், $Z = 0$க்கு இடப்புறம் அமைகிறது. பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து, பரப்பு 0.31க்கு உண்டான Z மதிப்பு 0.88 ஆகும். $Z = 0$க்கு இடப்புறம் அமைவதால் $c = -0.88$

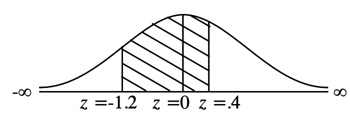
எடுத்துக்காட்டு 10.29 :

இயல்நிலை மாறி X-ன் சராசரி 6 மற்றும் திட்ட விலக்கம் 5 ஆகும். (i) $P(0 \le X \le 8)$ (ii) $P(|X - 6| < 10)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு : $\mu = 6,\ \sigma = 5$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $P(0 \le X \le 8)$

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ தெரிந்ததே.



படம் *10.17*

$X = 0$ எனில், $Z = \dfrac{0-6}{5} = \dfrac{-6}{5} = -1.2$

$X = 8$ எனில், $Z = \dfrac{8-6}{5} = \dfrac{2}{5} = 0.4$

$\therefore\ P(0 \le X \le 8) = P(-1.2 < Z < 0.4)$

$= P(0 < Z < 1.2) + P(0 < Z < .4)$ (சமச்சீர் பண்பு)

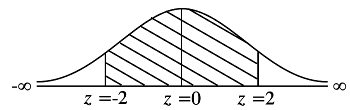
$= 0.3849 + 0.1554$

$= 0.5403$

(ii) $P(|X - 6| < 10) = P(-10 < (X - 6) < 10) \Rightarrow P(-4 < X < 16)$

$X = -4$ எனில், $Z = \dfrac{-4-6}{5} = \dfrac{-10}{5} = -2$

$X = 16$ எனில், $Z = \dfrac{16-6}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$



படம் *10.18*

$P(-4 < X < 16) = P(-2 < Z < 2)$

$= 2\,P(0 < Z < 2)$ (*சமச்சீர் பண்பு*)

$= 2\,(0.4772) = 0.9544$

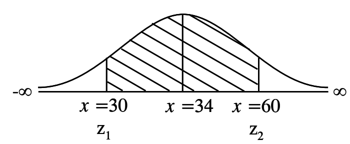
எடுத்துக்காட்டு 10.30 : *ஒரு தேர்வில் 1000 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 34 மற்றும் திட்ட விலக்கம் 16 ஆகும். மதிப்பெண் இயல்நிலைப் பரவலை பெற்றிருப்பின் (i) 30இலிருந்து 60 மதிப்பெண்களுக்கிடையே மதிப்பெண் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (ii) மத்திய 70% மாணவர்கள் பெறும் மதிப்பெண்களின் எல்லைகள் இவற்றைக் காண்க.*

தீர்வு : $\mu = 34, \quad \sigma = 16, \quad N = 1000$

(i) $P(30 < X < 60)$; $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

$\therefore \quad X = 30, \; Z_1 = \dfrac{30-\mu}{\sigma} = \dfrac{30-34}{16}$

$= \dfrac{-4}{16} = -0.25$



படம் *10.19*

$Z_1 = -0.25$

$Z_2 = \dfrac{60-34}{16} = \dfrac{26}{16} = 1.625$

$Z_2 \approx 1.63$ (தோராயமாக)

$P(-0.25 < Z < 1.63) = P(0 < Z < 0.25) + P(0 < Z < 1.63)$ (*சமச்சீர் பண்பு*)

$= 0.0987 + 0.4484 = 0.5471$

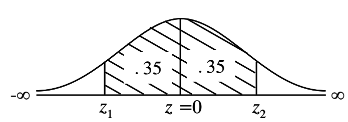
30இலிருந்து 60 மதிப்பெண்கள் வரை பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $\Big\}$ $= 0.5471 \times 1000 = 547.$

(ii) மத்திய 70% மாணவர்களின் எல்லைகள் **:**

பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து 0.35 பரப்பிற்கான Z_1இன் மதிப்பு $\Big\}$ $= -1.04$

[$Z = 0$க்கு இடப்புறம் Z_1 அமைவதால்]

இது போலவே $Z_2 = 1.04$



படம் *10.20*

$Z_1 = \dfrac{X - 34}{16} = 1.04$

$X_1 = 16 \times 1.04 + 34$

$= 16.64 + 34$

$X_1 = 50.64$

$Z_2 = \dfrac{X - 34}{16} = -1.04$

$X_2 = -1.04 \times 16 + 34$

$X_2 = -16.64 + 34$

$X_2 = 17.36$

$\therefore$ *மத்திய* 70% *மாணவர்கள்* 17.36*இலிருந்து* 50.64*க்கு இடைப்பட்ட மதிப்பெண்களைப் பெறுகிறார்கள்.*

எடுத்துக்காட்டு 10.31 : *இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு* $f(x) = k\, e^{-2x^2 + 4x}$, $-\infty < X < \infty$ *எனில்* μ *மற்றும்* σ^2*இன் மதிப்பு காண்க.*

தீர்வு : *எடுத்துக் கொள்க :*

$$-2x^2 + 4x = -2\,(x^2 - 2x) = -2\,[(x-1)^2 - 1] = -2\,(x-1)^2 + 2$$

$$\therefore\ e^{-2x^2 + 4x} = e^2 .\ e^{-2(x-1)^2}$$

$$= e^2 .\ e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{1/4}} = e^2 .\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{1/2}\right)^2}$$

$f(x)$*உடன் ஒப்பிடுகையில்*

$$k\, e^{-2x^2 + 4x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ k\, e^2\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{1/2}\right)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\ ;\ \mu = 1\ \textit{மற்றும்}\ k = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}\ .\ e^{-2} = \frac{2e^{-2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{2}\, e^{-2}}{\sqrt{\pi}},\ \sigma^2 = \frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.32 : *நவீன சிற்றுந்துகளில் பொருத்தப்படும் சக்கரங்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சக்கரத்தின் காற்றழுத்தம் இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்திருக்கிறது. காற்றழுத்த சராசரி* 31 psi. *மேலும் திட்ட விலக்கம்* 0.2 psi *எனில்*

(i) (a) 30.5 psi*க்கும்* 31.5 psi*க்கும் இடைப்பட்ட காற்றழுத்தம்*

(b) 30 psi*க்கும்* 32 psi*க்கும் இடைப்பட்ட காற்றழுத்தம் என இருக்கும்படியாக சக்கரத்தினை தேர்ந்தெடுக்க நிகழ்தகவு காண்க.*

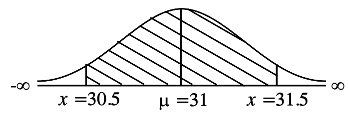
(ii) *சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சக்கரத்தின் காற்றழுத்தம்* 30.5 psi*க்கு அதிகமாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.*

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டவை $\mu = 31$ மற்றும் $\sigma = 0.2$

(i) (a) $P(30.5 < X < 31.5)$; $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

$X = 30.5$ எனில், $Z = \dfrac{30.5 - 31}{0.2} = \dfrac{-0.5}{0.2} = -2.5$

$X = 31.5$ எனில் $Z = \dfrac{31.5 - 31}{0.2} = \dfrac{0.5}{0.2} = 2.5$



படம் 10.21

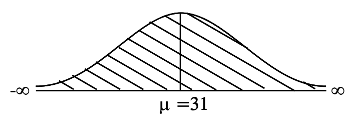
∴ தேவையான நிகழ்தகவு

$$P(30.5 < X < 31.5) = P(-2.5 < Z < 2.5)$$
$$= 2\,P(0 < Z < 2.5)$$
[சமச்சீர் பண்பு]
$$= 2(0.4938) = 0.9876$$

(b) $P(30 < X < 32)$

$X = 30$ எனில், $Z = \dfrac{30 - 31}{0.2} = \dfrac{-1}{0.2} = -5$

$X = 32$ எனில், $Z = \dfrac{32 - 31}{0.2} = \dfrac{1}{0.2} = 5$



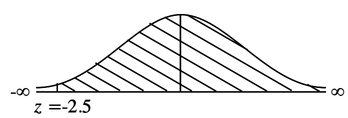
படம் 10.22

$P(30 < X < 32) = P(-5 < Z < 5)$

= முழு வளைவரையின் கீழ் உள்ள பரப்பு = 1 (தோராயமாக)

(ii) $X = 30.5$ எனில், $Z = \dfrac{30.5 - 31}{0.2} = \dfrac{-0.5}{0.2} = -2.5$

$$P(X > 30.5) = P(Z > -2.5)$$
$$= 0.5 + P(0 < Z < 2.5)$$
$$= 0.5 + 0.4938 = 0.9938$$



படம் 10.23

பயிற்சி 10.5

(1) ஒரு இயல் நிலை மாறி X-ன் சராசரி 80 ஆகவும், திட்ட விலக்கம் 10 ஆகவும் அமைந்துள்ளது. கீழ்க்கண்டவற்றை தரப்படுத்தி நிகழ்தகவு காண்க.

(i) $P(X \le 100)$ (ii) $P(X \le 80)$

(iii) $P(65 \le X \le 100)$ (iv) $P(70 < X)$

(v) $P(85 \le X \le 95)$

(2) Z ஒரு திட்ட இயல் நிலை மாறி எனில், கீழ்க்கண்டவற்றில் cஇன் மதிப்பு காண்க.

(i) $P(0 < Z < c) = 0.25$ *(ii)* $P(-c < Z < c) = 0.40$

(iii) $P(Z > c) = 0.85$

(3) அமெரிக்க கண்டத்தில் ஜெட் விமானத்தில் பயணம் செய்யும் ஒரு நபர் காஸ்மிக் கதிரியக்கத்தினால் பாதிக்கப்படுவது ஒரு இயல்நிலை பரவலாகும். இதன் சராசரி 4.35 m rem ஆகவும், திட்ட விலக்கம் 0.59 m rem ஆகவும் அமைந்துள்ளது. ஒரு நபர் 5.20 m rem க்கு மேல் காஸ்மிக் கதிரியக்கத்தினால் பாதிக்கப்படுவார் என்பதற்கு நிகழ்தகவு காண்க.

(4) போர் வீரர்களின் காலணிகளின் ஆயுட்காலம் இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்திருக்கிறது. இந்தப் பரவலின் சராசரி 8 மாதமாகவும், திட்டவிலக்கம் 2 மாதமாகவும் அமைகிறது. 5000 சோடி காலணிகள் அளிக்கப்பட்ட போது, எத்தனை சோடிகளை 12 மாதங்களுக்குள்ளாக மாற்றப்பட வேண்டுமென எதிர்பார்க்கலாம்.

(5) ஒரு குறிப்பிட்ட கல்லூரியில் 500 மாணவர்களின் எடைகள் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்திருப்பதாகக் கொள்ளப்படுகிறது. இதன் சராசரி 151 பவுண்டுகளாகவும் திட்ட விலக்கம் 15 பவுண்டுகளாகவும் உள்ளன. (i) 120 பவுண்டுக்கும் 155 பவுண்டுக்கும் இடையேயுள்ள மாணவர்கள் (ii) 185 பவுண்டுக்கு மேல் நிறையுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை காண்க.

(6) 300 மாணவர்களின் உயரங்கள் இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்திருக்கிறது. இதன் சராசரி 64.5 அங்குலங்கள். மேலும் திட்ட விலக்கம் 3.3 அங்குலங்கள். எந்த உயரத்திற்குக் கீழ் 99% மாணவர்களின் உயரம் அடங்கியிருக்கும்?

(7) ஒரு பள்ளியின் 800 மாணவர்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்ட திறனாய்வுத் தேர்வின் மதிப்பெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்திருக்கிறது. 10% மாணவர்கள் 40 மதிப்பெண்களுக்குக் கீழேயும், 10% மாணவர்கள் 90 மதிப்பெண்களுக்கு மேலும் பெறுகிறார்கள். 40 மதிப்பெண்களுக்கும் 90 மதிப்பெண்களுக்கும் இடையே மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(8) ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவுப் பரவல்

$f(x) = c\, e^{-x^2 + 3x}$, $-\infty < X < \infty$ எனில், c, μ, σ^2 இவற்றைக் காண்க.

பல்வாய்ப்பு விடையளி வினாக்கள்
(குறிக்கோள் வினாக்கள்)
(OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

சரியான அல்லது ஏற்புடைய விடையினை எடுத்தெழுதுக:

(1) $x = 2$இல் $y = -2x^3 + 3x + 5$ என்ற வளைவரையின் சாய்வு

(1) -20 (2) 27 (3) -16 (4) -21

(2) r ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் பரப்பு Aஇல் ஏற்படும் மாறும் வீதம்,

(1) $2\pi r$ (2) $2\pi r \frac{dr}{dt}$ (3) $\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ (4) $\pi \frac{dr}{dt}$

(3) ஆதியிலிருந்து ஒரு நேர்க்கோட்டில் x தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் திசைவேகம் v எனவும் $a + bv^2 = x^2$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு a மற்றும் b மாறிலிகள். அதன் முடுக்கம் ஆனது

(1) $\frac{b}{x}$ (2) $\frac{a}{x}$ (3) $\frac{x}{b}$ (4) $\frac{x}{a}$

(4) ஒரு உருகும் பனிக்கட்டிப் கோளத்தின் கன அளவு 1 செ.மீ.^{3} / நிமிடம் எனக் குறைகின்றது. அதன் விட்டம் 10 செ.மீ. என இருக்கும் போது விட்டம் குறையும் வேகம் ஆனது

(1) $\frac{-1}{50\pi}$ செ.மீ. / நிமிடம் (2) $\frac{1}{50\pi}$ செ.மீ. / நிமிடம்

(3) $\frac{-11}{75\pi}$ செ.மீ. / நிமிடம் (4) $\frac{-2}{75\pi}$ செ.மீ. / நிமிடம்

(5) $y = 3x^2 + 3\sin x$ என்ற வளைவரைக்கு $x=0$வில் தொடுகோட்டின் சாய்வு

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) -1

(6) $y = 3x^2$ என்ற வளைவரைக்கு xஇன் ஆயத்தொலைவு 2 எனக் கொண்டுள்ள புள்ளியில் செங்கோட்டின் சாய்வானது

(1) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{1}{14}$ (3) $\frac{-1}{12}$ (4) $\frac{1}{12}$

(7) $y = 2x^2 - 6x - 4$ என்ற வளைவரையில் x –அச்சுக்கு இணையாகவுள்ள தொடுகோட்டின் தொடு புள்ளி

(1) $\left(\frac{5}{2}, \frac{-17}{2}\right)$ (2) $\left(\frac{-5}{2}, \frac{-17}{2}\right)$ (3) $\left(\frac{-5}{2}, \frac{17}{2}\right)$ (4) $\left(\frac{3}{2}, \frac{-17}{2}\right)$

(8) $y = \frac{x^3}{5}$ எனும் வளைவரைக்கு (–1, – 1/5) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

(1) $5y + 3x = 2$ (2) $5y - 3x = 2$ (3) $3x - 5y = 2$ (4) $3x + 3y = 2$

(9) $\theta = \frac{1}{t}$ எனும் வளைவரைக்கு புள்ளி (–3, – 1/3) என்ற புள்ளியில் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $3\theta = 27t - 80$ (2) $5\theta = 27t - 80$

(3) $3\theta = 27t + 80$ (4) $\theta = \frac{1}{t}$

(10) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ மற்றும் $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ எனும் வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

(11) $y = e^{mx}$ மற்றும் $y = e^{-mx}$, $m > 1$ என்னும் வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

(1) $\tan^{-1}\left(\frac{2m}{m^2-1}\right)$ (2) $\tan^{-1}\left(\frac{2m}{1-m^2}\right)$

(3) $\tan^{-1}\left(\frac{-2m}{1+m^2}\right)$ (4) $\tan^{-1}\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)$

(12) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ எனும் வளைவரையின் துணை அலகுச் சமன்பாடுகள்

(1) $x = a\sin^3\theta$; $y = a\cos^3\theta$ (2) $x = a\cos^3\theta$; $y = a\sin^3\theta$

(3) $x = a^3\sin\theta$; $y = a^3\cos\theta$ (4) $x = a^3\cos\theta$; $y = a^3\sin\theta$

(13) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளைவரையின் செங்கோடு xஅச்சுடன் θ என்னும் கோணம் ஏற்படுத்துமெனில் அச்செங்கோட்டின் சாய்வு

(1) $-\cot\theta$ (2) $\tan\theta$ (3) $-\tan\theta$ (4) $\cot\theta$

(14) ஒரு சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தின் நீளம் அதிகரிக்கும் வீதம் 0.1 செ.மீ / வினாடி. எனில் பக்க அளவு $\frac{15}{\sqrt{2}}$ செ.மீ ஆக இருக்கும் போது அதன் பரப்பளவு அதிகரிக்கும் வீதம்

(1) 1.5 செ.மீ^{2}/வினாடி (2) 3 செ.மீ^{2}/வினாடி

(3) $3\sqrt{2}$ செ.மீ^{2}/வினாடி (4) 0.15 செ.மீ^{2}/வினாடி

(15) ஒரு கோளத்தின் கன அளவு மற்றும் ஆரத்தில் ஏற்படும் மாறுவீதங்கள் எண்ணளவில் சமமாக இருக்கும்போது கோளத்தின் வளைபரப்பு

(1) 1 (2) $\frac{1}{2\pi}$ (3) 4π (4) $\frac{4\pi}{3}$

(16) $x^3 - 2x^2 + 3x + 8$ அதிகரிக்கும் வீதமானது x அதிகரிக்கும் வீதத்தைப் போல் இரு மடங்கு எனில் xஇன் மதிப்புகள்

(1) $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$ (2) $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ (3) $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ (4) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

(17) ஒரு உருளையின் ஆரம் 2 செ.மீ. / வினாடி என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது. அதன் உயரம் 3 செ.மீ. / வினாடி என்ற வீதத்தில் குறைகின்றது. ஆரம் 3 செ.மீ. மற்றும் உயரம் 5 செ.மீ. ஆக இருக்கும் போது அதன் கன அளவின் மாறு வீதம்

(1) 23π (2) 33π (3) 43π (4) 53π

(18) $y = 6x - x^3$ மேலும் x ஆனது வினாடிக்கு 5 அலகுகள் வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது. $x = 3$ எனும் போது அதன் சாய்வின் மாறுவீதம்

(1) -90 அலகுகள் / வினாடி (2) 90 அலகுகள் / வினாடி

(3) 180 அலகுகள் / வினாடி (4) -180 அலகுகள் / வினாடி

(19) ஒரு கனச்சதுரத்தின் கன அளவு 4செ.மீ.^{3} / வினாடி என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது. அக்கனச்சதுரத்தின் கன அளவு 8 க.செ.மீ. ஆக இருக்கும் போது அதன் புறப்பரப்பளவு அதிகரிக்கும் வீதம்

(1) 8 செ.மீ.^{2}/வினாடி (2) 16 செ.மீ.^{2}/வினாடி

(3) 2 செ.மீ.^{2}/வினாடி (4) 4 செ.மீ.^{2}/வினாடி

(20) $y = 8 + 4x - 2x^2$ என்ற வளைவரை y-அச்சை வெட்டும் புள்ளியில் அமையும் தொடுகோட்டின் சாய்வு

(1) 8 (2) 4 (3) 0 (4) -4

(21) $y^2 = x$ மற்றும் $x^2 = y$ என்ற பரவளையங்களுக்கிடையே ஆதியில் அமையும் கோணம்

(1) $2\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (2) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

(22) $x = e^t \cos t$; $y = e^t \sin t$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோடு x-அச்சுக்கு இணையாகவுள்ளது எனில் tஇன் மதிப்பு

(1) $-\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) 0 (4) $\frac{\pi}{2}$

(23) ஒரு வளைவரையின் செங்கோடு xஅச்சின் மிகை திசையில் θ என்னும் கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. அச்செங்கோடு வரையப்பட்ட புள்ளியில் வளைவரையின் சாய்வு

(1) $-\cot\theta$ (2) $\tan\theta$ (3) $-\tan\theta$ (4) $\cot\theta$

(24) $y = 3e^x$ மற்றும் $y = \frac{a}{3}e^{-x}$ என்னும் வளைவரைகள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன எனில் 'a'இன் மதிப்பு

(1) -1 (2) 1 (3) $\frac{1}{3}$ (4) 3

(25) $s = t^3 - 4t^2 + 7$ எனில் முடுக்கம் பூச்சியமாகும் போதுள்ள திசைவேகம்

(1) $\frac{32}{3}$ m/sec (2) $\frac{-16}{3}$ m/sec (3) $\frac{16}{3}$ m/sec (4) $\frac{-32}{3}$ m/sec

(26) ஒரு நேர்க்கோட்டில் நகரும் புள்ளியின் திசைவேகமானது, அக்கோட்டில் ஒரு நிலைப்புள்ளியிலிருந்து நகரும் புள்ளிக்கு இடையில் உள்ள தொலைவின் வர்க்கத்திற்கு நேர் விகிதமாக அமைந்துள்ளது எனில் அதன் முடுக்கம் பின்வரும் ஒன்றினுக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது.

(1) s (2) s^2 (3) s^3 (4) s^4

(27) $y = x^2$ என்ற சார்பிற்கு $[-2, 2]$இல் ரோலின் மாறிலி

(1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (2) 0 (3) 2 (4) -2

(28) $a = 0$, $b = 1$ எனக் கொண்டு $f(x) = x^2 + 2x - 1$ என்ற சார்பிற்கு லெக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின்படியுள்ள 'c'இன் மதிப்பு

(1) -1 (2) 1 (3) 0 (4) $\frac{1}{2}$

(29) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ என்ற சார்பிற்கு $[\pi, 3\pi]$இல் ரோல் தேற்றத்தின்படி அமைந்த cஇன் மதிப்பு

(1) 0 2) 2π (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) $\frac{3\pi}{2}$

(30) $a = 1$ மற்றும் $b = 4$ எனக் கொண்டு, $f(x) = \sqrt{x}$ என்ற சார்பிற்கு லெக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின்படி அமையும் 'c'இன் மதிப்பு

(1) $\frac{9}{4}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

(31) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$ -ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 0 (3) ∞ (4) 1

(32) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ -ன் மதிப்பு

(1) ∞ (2) 0 (3) $\log \frac{ab}{cd}$ (4) $\frac{\log (a/b)}{\log (c/d)}$

(33) $f(a) = 2;\ f'(a) = 1\ ;\ g(a) = -1\ ;\ g'(a) = 2$ எனில்

$\lim_{x \to a} \frac{g(x)\, f(a) - g(a)\, f(x)}{x - a}$ இன் மதிப்பு

(1) 5 (2) – 5 (3) 3 (4) – 3

(34) பின்வருவனவற்றுள் எது $(0, \infty)$இல் ஏறும் சார்பு?

(1) e^x (2) $\frac{1}{x}$ (3) $-x^2$ (4) x^{-2}

(35) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ என்ற சார்பு ஏறும் இடைவெளி

(1) $(-\infty, 1)$ (2) $(1, 4)$ (3) $(4, \infty)$ (4) எல்லா புள்ளிகளிடத்தும்

(36) $f(x) = x^2$ என்ற சார்பு இறங்கும் இடைவெளி

(1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 0)$ (3) $(0, \infty)$ (4) $(-2, \infty)$

(37) $y = \tan x - x$ என்ற சார்பு

(1) $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$இல் ஏறும் சார்பு

(2) $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$இல் இறங்கும் சார்பு

(3) $\left(0 , \frac{\pi}{4}\right)$இல் ஏறும் $\left(\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}\right)$ இல் இறங்கும்

(4) $\left(0 , \frac{\pi}{4}\right)$இல் இறங்கும் $\left(\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}\right)$ இல் ஏறும்

(38) கொடுக்கப்பட்டுள்ள அரை வட்டத்தின் விட்டம் 4 செ.மீ. அதனுள் வரையப்படும் செவ்வகத்தின் பெரும பரப்பு

(1) 2 (2) 4 (3) 8 (4) 16

(39) 100மீ^{2} பரப்பு கொண்டுள்ள செவ்வகத்தின் மீச்சிறு சுற்றளவு

(1) 10 (2) 20 (3) 40 (4) 60

(40) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ என்ற சார்பு $[0, 3]$இல் கொண்டுள்ள மீப்பெரு பெருமம மதிப்பு

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

(41) $y = -e^{-x}$ என்ற வளைவரை

(1) $x > 0$விற்கு மேல்நோக்கிக் குழிவு

(2) $x > 0$விற்கு கீழ்நோக்கிக் குழிவு

(3) எப்போதும் மேல்நோக்கிக் குழிவு

(4) எப்போதும் கீழ்நோக்கிக் குழிவு

(42) பின்வரும் வளைவரைகளுள் எது கீழ்நோக்கி குழிவு பெற்றுள்ளது?

(1) $y = -x^2$ (2) $y = x^2$ (3) $y = e^x$ (4) $y = x^2 + 2x - 3$

(43) $y = x^4$ என்ற வளைவரையின் வளைவு மாற்றுப்புள்ளி

(1) $x = 0$ (2) $x = 3$ (3) $x = 12$ (4) எங்குமில்லை

(44) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ என்ற வளைவரைக்கு $x = 1$இல் ஒரு வளைவு மாற்றுப்புள்ளி உண்டெனில்

(1) $a + b = 0$ (2) $a + 3b = 0$ (3) $3a + b = 0$ (4) $3a + b = 1$

(45) $u = x^y$ எனில் $\frac{\partial u}{\partial x}$க்குச் சமமானது

(1) yx^{y-1} (2) $u \log x$ (3) $u \log y$ (4) xy^{x-1}

(46) $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}\right)$ மற்றும் $f = \sin u$ எனில், சமபடித்தான சார்பு fஇன்படி

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 4

(47) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ எனில் $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} =$

(1) $\frac{1}{2}u$ (2) u (3) $\frac{3}{2}u$ (4) $-u$

(48) $y^2(x-2) = x^2(1+x)$ என்ற வளைவரைக்கு

(1) x-அச்சுக்கு இணையான ஒரு தொலைத் தொடுகோடு உண்டு

(2) y-அச்சுக்கு இணையான ஒரு தொலைத் தொடுகோடு உண்டு

(3)இரு அச்சுகளுக்கும் இணையான தொலைத் தொடுகோடுகள் உண்டு

(4) தொலைத் தொடுகோடுகள் இல்லை

(49) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ எனில் $\frac{\partial r}{\partial x} =$

(1) $\sec\theta$ (2) $\sin\theta$ (3) $\cos\theta$ (4) $\mathrm{cosec}\,\theta$

(50) பின்வருனவற்றுள் சரியான கூற்றுகள்:

(i) ஒரு வளைவரை ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றிருப்பின் அது இரு அச்சுகளைப் பொறுத்தும் சமச்சீர் பெற்றிருக்கும்.

(ii) ஒரு வளைவரை இரு அச்சுகளைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றிருப்பின் அது ஆதியைப் பொறுத்தும் சமச்சீர் பெற்றிருக்கும்.

(iii) $f(x, y) = 0$ என்ற வளைவரை $y = x$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றுள்ளது எனில் $f(x, y) = f(y, x)$.

(iv) $f(x, y) = 0$ என்ற வளைவரைக்கு $f(x, y) = f(-y, -x)$, உண்மையாயின் அது ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றிருக்கும்.

(1) (ii), (iii) (2) (i), (iv) (3) (i), (iii) (4) (ii), (iv)

(51) $u = \log\left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)$ எனில் $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ என்பது

(1) 0 (2) u (3) $2u$ (4) u^{-1}

(52) 28இன் 11ஆம் படிமூல சதவிகிதப் பிழை தோராயமாக 28இன் சதவிகிதப் பிழையைப் போல் ______ மடங்காகும்

(1) $\frac{1}{28}$ (2) $\frac{1}{11}$ (3) 11 (4) 28

(53) $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ என்ற வளைவரை

(1) $x = 0$ மற்றும் $x = a$க்கு இடையில் ஒரு கண்ணி மட்டுமே கொண்டுள்ளது

(2) $x = 0$ மற்றும் $x = a$க்கு இடையில் இரு கண்ணிகள் கொண்டு உள்ளது

(3) $x = -a$ மற்றும் $x = a$க்கு இடையில் இரு கண்ணிகள் கொண்டு உள்ளது

(4) கண்ணி ஏதுமில்லை

(54) $y^2(a + 2x) = x^2(3a - x)$ என்ற வளைவரையின் தொலைத் தொடுகோடு

(1) $x = 3a$ (2) $x = -a/2$ (3) $x = a/2$ (4) $x = 0$

(55) $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$ என்ற வளைவரை பின்வருவனவற்றுள் எந்தப் பகுதியில் அமையாது?

(1) $x > 0$ (2) $0 < x < 3a$ (3) $x \le -a$ மற்றும் $x > 3a$ (4) $-a < x < 3a$

(56) $u = y \sin x$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} =$

(1) $\cos x$ (2) $\cos y$ (3) $\sin x$ 4) 0

(57) $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ எனில், $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) $2u$ (4) u

(58) $9y^2 = x^2(4 - x^2)$ என்ற வளைவரை எதற்கு சமச்சீர்?

(1) y-அச்சு (2) x-அச்சு (3) $y = x$ (4) இரு அச்சுகள்

(59) $ay^2 = x^2 (3a - x)$ என்ற வளைவரை y-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள்

(1) $x = -3a, x = 0$ (2) $x = 0, x = 3a$ (3) $x = 0, x = a$ (4) $x = 0$

(60) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{5/3}x}{\cos^{5/3}x + \sin^{5/3}x}\, dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) 0 (4) π

(61) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x}\, dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) 0 (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

(62) $\int_0^1 x(1 - x)^4\, dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{30}$ (3) $\frac{1}{24}$ (4) $\frac{1}{20}$

(63) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\sin x}{2 + \cos x}\right) dx$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 2 (3) log 2 (4) log 4

(64) $\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$ இன் மதிப்பு

(1) $3\pi/16$ (2) $3/16$ (3) 0 (4) $3\pi/8$

(65) $\int_0^{\pi/4} \cos^3 2x\, dx$இன் மதிப்பு

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) 0 (4) $\frac{2\pi}{3}$

(66) $\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x \, dx$ இன் மதிப்பு

(1) π (2) $\pi/2$ (3) $\pi/4$ (4) 0

(67) $y = x$ என்ற கோட்டிற்கும் x-அச்சு, கோடுகள் $x = 1$ மற்றும் $x = 2$ ஆகியவற்றிற்கும் இடைப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பு

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{7}{2}$

(68) $x = 0$இலிருந்து $x = \frac{\pi}{4}$ வரையிலான $y = \sin x$ மற்றும் $y = \cos x$ என்ற வளைவரைகளின் இடைப்பட்ட பரப்பு

(1) $\sqrt{2} + 1$ (2) $\sqrt{2} - 1$ (3) $2\sqrt{2} - 2$ (4) $2\sqrt{2} + 2$

(69) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்திற்கும் அதன் துணை வட்டத்திற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு

(1) $\pi b(a - b)$ (2) $2\pi a\,(a - b)$ (3) $\pi a\,(a - b)$ (4) $2\pi b\,(a - b)$

(70) பரவளைய$y^2 = x$க்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு

(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{8}{3}$

(71) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ என்ற வளைவரையை குற்றச்சை பொறுத்து சுழற்றப்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு

(1) 48π (2) 64π (3) 32π (4) $128\,\pi$

(72) $y = \sqrt{3 + x^2}$ என்ற வளைவரை $x = 0$விலிருந்து $x = 4$ வரை x-அச்சை அச்சாக வைத்துச் சுழற்றப்படும் திடப்பொருளின் கனஅளவு

(1) $100\,\pi$ (2) $\frac{100}{9}\pi$ (3) $\frac{100}{3}\pi$ (4) $\frac{100}{3}$

(73) கோடுகள் $y = x$, $y = 1$ மற்றும் $x = 0$ ஆகியவை ஏற்படுத்தும் பரப்பு y-அச்சை பொறுத்துச் சுழற்றப்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு

(1) $\pi/4$ (2) $\pi/2$ (3) $\pi/3$ (4) $2\pi/3$

(74) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் பரப்பை நெட்டச்சு, குற்றச்சு இவற்றை பொறுத்துச் சுழற்றப்படும் திடப்பொருளின் கன அளவுகளின் விகிதம்

(1) $b^2 : a^2$ (2) $a^2 : b^2$ (3) $a : b$ (4) $b : a$

(75) (0, 0), (3, 0) மற்றும் (3, 3) ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு x-அச்சை பொறுத்துச் சுழற்றப்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு

(1) 18π (2) 2π (3) 36π (4) 9π

(76) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ என்ற வளைவரையின் வில்லின் நீளம்

(1) 48 (2) 24

(3) 12 (4) 96

(77) $y = 2x$, $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ இவற்றிற்கு இடையே ஏற்படும் பரப்பு x-அச்சை பொறுத்துச் சுழற்றப்படும் திடப்பொருளின் வளைப்பரப்பு

(1) $8\sqrt{5}\,\pi$ (2) $2\sqrt{5}\,\pi$ (3) $\sqrt{5}\pi$ (4) $4\sqrt{5}\pi$

(78) ஆரம் 5 உள்ள கோளத்தை தளங்கள் மையத்திலிருந்து 2 மற்றும் 4 தூரத்தில் வெட்டும் இரு இணையான தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட பகுதியின் வளைப்பரப்பு

(1) 20π (2) 40π (3) 10π (4) 30π

(79) $\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = e^{4x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகைக் காரணி

(1) $\log x$ (2) x^2 (3) e^x (4) x

(80) $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகைக் காரணி $\cos x$ எனில், Pஇன் மதிப்பு

(1) $-\cot x$ (2) $\cot x$ (3) $\tan x$ (4) $-\tan x$

(81) $dx + xdy = e^{-y}\sec^2 y\, dy$இன் தொகைக் காரணி

(1) e^x (2) e^{-x} (3) e^y (4) e^{-y}

(82) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x\log x}.y = \frac{2}{x^2}$ இன் தொகைக் காரணி

(1) e^x (2) $\log x$ (3) $\frac{1}{x}$ (4) e^{-x}

(83) $m < 0$ஆக இருப்பின் $\frac{dx}{dy} + mx = 0$இன் தீர்வு

(1) $x = ce^{my}$ (2) $x = ce^{-my}$ (3) $x = my + c$ (4) $x = c$

(84) $y = cx - c^2$ என்பதனைப் பொதுத் தீர்வாகப் பெற்ற வகைக்கெழு சமன்பாடு

(1) $(y')^2 - xy' + y = 0$ (2) $y'' = 0$

(3) $y' = c$ (4) $(y')^2 + xy' + y = 0$

(85) $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 5y^{1/3} = x$ என்ற வகைக்கெழுவின்

(1) வரிசை 2 மற்றும் படி 1
(2) வரிசை 1 மற்றும் படி 2
(3) வரிசை 1 மற்றும் படி 6
(4) வரிசை 1 மற்றும் படி 3

(86) ஒரு தளத்தில் உள்ள x-அச்சுக்கு செங்குத்தல்லாத கோடுகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(1) $\frac{dy}{dx} = 0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (3) $\frac{dy}{dx} = m$ (4) $\frac{d^2y}{dx^2} = m$

(87) ஆதிப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(1) $x\,dy + y\,dx = 0$ (2) $x\,dy - y\,dx = 0$
(3) $x\,dx + y\,dy = 0$ (4) $x\,dx - y\,dy = 0$

(88) வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} + py = Q$வின் தொகைக் காரணி

(1) $\int pdx$ (2) $\int Q\,dx$ (3) $e^{\int Q\,dx}$ (4) $e^{\int pdx}$

(89) $(D^2 + 1)y = e^{2x}$இன் நிரப்புச் சார்பு

(1) $(Ax + B)e^x$ (2) $A\cos x + B\sin x$ (3) $(Ax + B)e^{2x}$ (4) $(Ax + B)e^{-x}$

(90) $(D^2 - 4D + 4)y = e^{2x}$ இன் சிறப்புத் தீர்வு (PI)

(1) $\frac{x^2}{2}e^{2x}$ (2) xe^{2x} (3) xe^{-2x} (4) $\frac{x}{2}e^{-2x}$

(91) $y = mx$ என்ற நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(1) $\frac{dy}{dx} = m$ (2) $ydx - xdy = 0$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (4) $ydx + x\,dy = 0$

(92) $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3}} = \frac{d^2y}{dx^2}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 6

(93) $c = \dfrac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3\right]^{2/3}}{\dfrac{d^3y}{dx^3}}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி

(இங்கு c ஒரு மாறிலி)

(1) 1 (2) 3 (3) – 2 (4) 2

(94) ஒரு கதிரியக்க பொருளின் மாறுவீத மதிப்பு, அம்மதிப்பின் (P)நேர் விகிதத்தில் சிதைவுறுகிறது. இதற்கு ஏற்ற வகைக் கெழுச் சமன்பாடு (k குறை எண்)

(1) $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{k}{p}$ (2) $\dfrac{dp}{dt} = kt$ (3) $\dfrac{dp}{dt} = kp$ (4) $\dfrac{dp}{dt} = -kt$

(95) xy தளத்திலுள்ள எல்லா நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு

(1) $\dfrac{dy}{dx} =$ ஒரு மாறிலி (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ (3) $y + \dfrac{dy}{dx} = 0$ (4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(96) $y = ke^{\lambda x}$ எனில் அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = ky$ (3) $\dfrac{dy}{dx} + ky = 0$ (4) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\lambda x}$

(97) $y=ae^{3x}+be^{-3x}$ என்ற சமன்பாட்டில் aயையும் bயையும் நீக்கிக் கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + ay = 0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$ (3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 9\dfrac{dy}{dx} = 0$ (4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9x = 0$

(98) $y = e^x (A \cos x + B \sin x)$ என்ற தொடர்பில் Aயையும் Bயையும் நீக்கிப் பெறப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(1) $y_2 + y_1 = 0$ (2) $y_2 - y_1 = 0$

(3) $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ (4) $y_2 - 2y_1 - 2y = 0$

(99) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y}{x + y}$ எனில்

(1) $2xy + y^2 + x^2 = c$ (2) $x^2 + y^2 - x + y = c$

(3) $x^2 + y^2 - 2xy = c$ (4) $x^2 - y^2 - 2xy = c$

(100) $f'(x) = \sqrt{x}$ மற்றும் $f(1) = 2$ எனில் $f(x)$ என்பது

(1) $-\dfrac{2}{3}\left(x\sqrt{x} + 2\right)$ (2) $\dfrac{3}{2}\left(x\sqrt{x} + 2\right)$

(3) $\dfrac{2}{3}\left(x\sqrt{x} + 2\right)$ (4) $\dfrac{2}{3}x\left(\sqrt{x} + 2\right)$

(101) $x^2dy + y(x + y)dx = 0$ என்ற சமப்படித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் $y = vx$ எனப் பிரதியீடு செய்யும் போது கிடைப்பது

(1) $xdv + (2v + v^2)dx = 0$ (2) $vdx + (2x + x^2)dv = 0$

(3) $v^2dx - (x + x^2)dv = 0$ (4) $vdv + (2x + x^2)dx = 0$

(102) $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \cos x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகைக் காரணி

(1) $\sec x$ (2) $\cos x$ (3) $e^{\tan x}$ (4) $\cot x$

(103) $(3D^2 + D - 14)y = 13e^{2x}$இன் சிறப்புத் தீர்வு

(1) $26x\, e^{2x}$ (2) $13x\, e^{2x}$ (3) $x\, e^{2x}$ (4) $x^2/2\, e^{2x}$

(104) $f(D) = (D - a)\, g(D)$, $g(a) \neq 0$ எனில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $f(D)y = e^{ax}$இன் சிறப்புத் தீர்வு

(1) me^{ax} (2) $\frac{e^{ax}}{g(a)}$ (3) $g(a)e^{ax}$ (4) $\frac{xe^{ax}}{g(a)}$

(105) கீழ்க்கண்டவற்றுள் எவை கூற்றுகள்?

(i) கடவுள் உன்னை ஆசிர்வதிக்கட்டும்

(ii) ரோசா ஒரு பூ

(iii) பாலின் நிறம் வெண்மை

(iv) 1 ஒரு பகா எண்

(1) (i), (ii), (iii) (2) (i), (ii), (iv) (3) (i), (iii), (iv) (4) (ii), (iii), (iv)

(106) ஒரு கூட்டுக் கூற்று மூன்று தனிக்கூற்றுகளைக் கொண்டதாக இருப்பின், மெய்யட்டவணையிலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கை

(1) 8 (2) 6 (3) 4 (4) 2

(107) pயின் மெய்மதிப்பு T மற்றும் qஇன் மெய்மதிப்பு Fஎனில் பின்வருவனவற்றில் எவை மெய்மதிப்பு T என இருக்கும்?

(i) $p \vee q$ (ii) $\sim p \vee q$ (iii) $p \vee \sim q$ (iv) $p \wedge \sim q$

(1) (i), (ii), (iii) (2) (i), (ii), (iv)

(3) (i), (iii), (iv) (4) (ii), (iii), (iv)

(108) $\sim [p \wedge (\sim q)]$ன் மெய் அட்டவணையில் நிரைகளின் எண்ணிக்கை

(1) 2 (2) 4 (3) 6 (4) 8

(109) நிபந்தனைக் கூற்று $p \rightarrow q$க்குச் சமானமானது

(1) $p \vee q$ (2) $p \vee \sim q$ (3) $\sim p \vee q$ (4) $p \wedge q$

(110) பின்வருவனவற்றுள் எது மெய்மையாகும்?

(1) $p \vee q$ (2) $p \wedge q$ (3) $p \vee \sim p$ (4) $p \wedge \sim p$

(111) பின்வருவனவற்றுள் எது முரண்பாடாகும்?

(1) $p \vee q$ (2) $p \wedge q$ (3) $p \vee \sim p$ (4) $p \wedge \sim p$

(112) $p \leftrightarrow q$க்குச் சமானமானது

(1) $p \to q$ (2) $q \to p$ (3) $(p \to q) \vee (q \to p)$ (4) $(p \to q) \wedge (q \to p)$

(113) கீழ்க்கண்டவற்றில் எது Rஇல் ஈருறுப்புச் செயலி அல்ல?

(1) $a * b = ab$ (2) $a * b = a - b$

(3) $a * b = \sqrt{ab}$ (4) $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$

(114) சமனியுடைய அரைக்குலம், குலமாவதற்கு பூர்த்தி செய்ய வேண்டிய விதியாவது,

(1) அடைப்பு விதி(2) சேர்ப்பு விதி

(3) சமனி விதி (4) எதிர்மறை விதி

(115) கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது குலம் அல்ல?

(1) $(Z_n , +_n)$ (2) $(Z, +)$ (3) $(Z, .)$ (4) $(R, +)$

(116) முழுக்களில் * என்ற ஈருறுப்புச் செயலி $a * b = a + b - ab$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் $3 * (4 * 5)$ இன் மதிப்பு

(1) 25 (2) 15 (3) 10 (4) 5

(117) $(Z_9 , +_9)$இல் [7] இன் வரிசை

(1) 9 (2) 6 (3) 3 (4) 1

(118) பெருக்கலைப் பொறுத்து குலமாகிய ஒன்றின் முப்படி மூலங்களில், ω^2இன் வரிசை

(1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 1

(119) $[3] +_{11} ([5] +_{11} [6])$இன் மதிப்பு

(1) [0] (2) [1] (3) [2] (4) [3]

(120) மெய்யெண்களின் கணம் Rஇல் * என்ற ஈருறுப்புச் செயலி

$a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் $(3 * 4) * 5$இன் மதிப்பு

(1) 5 (2) $5\sqrt{2}$ (3) 25 (4) 50

(121) கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது சரி?

(1) ஒரு குலத்தின் ஒரு உறுப்பிற்கு ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட எதிர்மறை உண்டு.

(2) குலத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் எதிர்மறையாக இருக்குமெனில் அக்குலம் ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

(3) மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட எல்லா 2×2 அணிக்கோவைகளும் பெருக்கல் விதியில் குலமாகும்.

(4) எல்லா $a, b \in G$க்கும் $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$

(122) பெருக்கல் விதியைப் பொறுத்து குலமாகிய ஒன்றின் நாலாம் மூலங்களில், $-i$ இன் வரிசை

(1) 4 (ii) 3 (3) 2 (4) 1

(123) பெருக்கலை பொறுத்து குலமாகிய ஒன்றின் nஆம் படி மூலங்களில் ω^kஇன் எதிர்மறை $(k < n)$

(1) $\omega^{1/k}$ (2) ω^{-1} (3) ω^{n-k} (4) $\omega^{n/k}$

(124) முழுக்களில் * என்ற ஈருறுப்புச் செயலி $a * b = a + b - 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் சமனி உறுப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) a (4) b

(125) $f(x) = \begin{cases} k x^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$

என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் kஇன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{12}$

(126) $f(x) = \frac{A}{\pi} \frac{1}{16 + x^2}, -\infty < x < \infty$ என்பது X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (*p.d.f.*) எனில் Aஇன் மதிப்பு

(1) 16 (2) 8 (3) 4 (4) 1

(127) X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல் பின்வருமாறு:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	1/4	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	1/4

$P(1 \le x \le 4)$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{10}{21}$ (2) $\frac{2}{7}$ (3) $\frac{1}{14}$ (4) $\frac{1}{2}$

(128) X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு பரவல் பின்வருமாறு:

X	–2	3	1
$P(X = x)$	$\frac{\lambda}{6}$	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\lambda}{12}$

λவின் மதிப்பு

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(129) X என்ற ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி 0, 1, 2 என்ற மதிப்புகளைக் கொள்கிறது. மேலும் $P(X = 0) = \frac{144}{169}$, $P(X = 1) = \frac{1}{169}$, எனில் $P(X = 2)$இன் மதிப்பு

(1) $\frac{145}{169}$ (2) $\frac{24}{169}$ (3) $\frac{2}{169}$ (4) $\frac{143}{169}$

(130) ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி Xஇன் நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு (*p.d.f*) பின்வருமாறு

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2 + k$

kஇன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{10}$ (3) 0 (4) – 1 or $\frac{1}{10}$

(131) $E(X + c) = 8$ மற்றும் $E(X - c) = 12$ எனில் cஇன் மதிப்பு

(1) -2 (2) 4 (3) -4 (4) 2

(132) X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் 3, 4 மற்றும் 12 ஆகிய மதிப்புகள் முறையே $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{5}{12}$ ஆகிய நிகழ்தகவுகளைக் கொள்ளுமெனில், $E(X)$இன் மதிப்பு

(1) 5 (2) 7 (3) 6 (4) 3

(133) X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவற்படி 4 மேலும் சராசரி 2 எனில் $E(X^2)$இன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 4 (3) 6 (4) 8

(134) ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி Xக்கு, $\mu_2 = 20$. மேலும் $\mu_2' = 276$ எனில் Xஇன் சராசரியின் மதிப்பு

(1) 16 (2) 5 (3) 2 (4) 1

(135) Var $(4X + 3)$இன் மதிப்பு

(1) 7 (2) 16 Var (X) (3) 19 (4) 0

(136) ஒரு பகடையை 5 முறை வீசும் போது, 1 அல்லது 2 கிடைப்பது வெற்றியெனக் கருதப்படுகிறது, எனில் வெற்றியின் சராசரியின் மதிப்பு

(1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{5}{9}$ (4) $\frac{9}{5}$

(137) ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 5 மேலும் திட்டவிலக்கம் 2 எனில் n மற்றும் pஇன் மதிப்புகள்

(1) $\left(\frac{4}{5}, 25\right)$ (2) $\left(25, \frac{4}{5}\right)$ (3) $\left(\frac{1}{5}, 25\right)$ (4) $\left(25, \frac{1}{5}\right)$

(138) ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 12 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 2 எனில் பண்பளவை pஇன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

(139) ஒரு பகடையை 16 முறைகள் வீசும் போது, இரட்டைப்படை எண் கிடைப்பது வெற்றியாகும் எனில் வெற்றியின் பரவற்படி

(1) 4 (2) 6 (3) 2 (4) 256

(140) ஒரு பெட்டியில் 6 சிவப்பு மற்றும் 4 வெள்ளைப் பந்துகள் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து 3 பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் திருப்பி வைக்காமல் எடுக்கப்பட்டால், 2 வெள்ளைப் பந்துகள் கிடைக்க நிகழ்தகவு

(1) $\frac{1}{20}$ (2) $\frac{18}{125}$ (3) $\frac{4}{25}$ (4) $\frac{3}{10}$

(141) நன்கு கலைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகள் கொண்ட சீட்டுக்கட்டிலிருந்து 2 சீட்டுகள் திருப்பி வைக்காமல் எடுக்கப்படுகின்றன. இரண்டும் ஒரே நிறத்தில் இருக்க நிகழ்தகவு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{26}{51}$ (3) $\frac{25}{51}$ (4) $\frac{25}{102}$

(142) ஒரு பாய்ஸான் பரவலில் $P(X = 0) = k$ எனில் பரவற்படியின் மதிப்பு

(1) $\log \frac{1}{k}$ (2) $\log k$ (3) e^{λ} (4) $\frac{1}{k}$

(143) ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X பாய்ஸான் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. மேலும் $E(X^2) = 30$ எனில் பரவலின் பரவற்படி

(1) 6 (2) 5 (3) 30 (4) 25

(144) சமவாய்ப்பு மாறி X இன் பரவல் சார்பு $F(X)$ ஒரு

(1) இறங்கும் சார்பு

(2) குறையா (இறங்கா) சார்பு

(3) மாறிலிச் சார்பு

(4) முதலில் ஏறும் சார்பு பின்னர் இறங்கும் சார்பு

(145) *பாய்ஸான் பரவலின் பண்பளவை* $\lambda = 0.25$. *எனில் இரண்டாவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை*

(1) 0.25 (2) 0.3125 (3) 0.0625 (4) 0.025

(146) *ஒரு பாய்ஸான் பரவலில்* $P(X = 2) = P(X = 3)$ *எனில், பண்பளவை* λ*இன் மதிப்பு*

(1) 6 (2) 2 (3) 3 (4) 0

(147) *ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு* $f(x)$*இன் சராசரி* μ *எனில்* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ *இன் மதிப்பு*

(1) 1 (2) 0.5 (3) 0 (4) 0.25

(148) *ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி* X, *இயல்நிலைப் பரவல்* $f(x) = c\, e^{\frac{-1/2\,(x-100)^2}{25}}$ *ஐ பின்பற்றுகிறது எனில்* c*இன் மதிப்பு*

(1) $\sqrt{2\pi}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (3) $5\sqrt{2\pi}$ (4) $\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}$

(149) *ஒரு இயல் நிலை மாறி* X *இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு* $f(x)$ *மற்றும்* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *எனில்* $\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\, dx$ *இன் மதிப்பு*

(1) *வரையறுக்க முடியாதது* (2) 1 (3) .5 (4) – .5

(150) 400 *மாணவர்கள் எழுதிய கணிதத் தேர்வின் மதிப்பெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்திருக்கிறது. இதன் சராசரி* 65. *மேலும்* 120 *மாணவர்கள்* 85 *மதிப்பெண்களுக்கு மேல் பெற்றிருப்பின், மதிப்பெண்கள்* 45*இலிருந்து* 65*க்குள் பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை*

(1) 120 (2) 20 (3) 80 (4) 160

விடைகள்

பயிற்சி 5.1

(1) (i) 100 மீ/வினாடி (ii) $t = 4$ (iii) 200மீ (iv) –100 மீ/வினாடி

(2) – 12, 0 (3) (i) 72 கி.மீ / மணி (ii) 60 மீ.

(4) 1.5936° செ./வினாடி (5) 1.6 செ./நிமிடம் வீதத்தில் குறைகிறது

(6) $\frac{195}{\sqrt{29}}$ கி.மீ / மணி (7) 0.3 மீ^{2}/வினாடி

(8) $\frac{\pi}{\sqrt{63}}$ மீ/நிமிடம் (9) $\frac{6}{5\pi}$ அடிகள்/நிமிடம்

பயிற்சி 5.2

(1) (i) $8x + y + 9 = 0$
$x - 8y + 58 = 0$

(ii) $2x - y - \pi/2 = 0$
$x + 2y - 3\pi/2 = 0$

(iii) $y = 2$
$x = \pi/6$

(iv) $y - (\sqrt{2} + 1) = (2 + \sqrt{2})\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
$y - (\sqrt{2} + 1) = \frac{-1}{2 + \sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(2) $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ மற்றும் $\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

(3) (2, 3) மற்றும் (– 2, – 3)

(4) (*i*) (1, 0) மற்றும் (1, 4) (ii) (3, 2) மற்றும் (– 1, 2)

(5) $2x + 3y \pm 26 = 0$ (6) $x + 9y \pm 20 = 0$

(9) $\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{\log a - \log b}{1 + \log a \ \log b}\right|\right]$

பயிற்சி 5.3

(1) (i) உண்மை , $c = \frac{\pi}{2}$ (ii) உண்மையல்ல , $f(0) \neq f(1)$

(iii) உண்மையல்ல ; $x = 1$இல் சார்பு வகையிட இயலாது.

(iv) உண்மை, $c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) (0, 1)

பயிற்சி 5.4

(1) (i) உண்மை , $c = \frac{3}{2}$ (ii) உண்மை, $c = \sqrt{2}$ (iii) உண்மை , $c = \frac{-1+\sqrt{61}}{6}$

(iv) உண்மையல்ல , $x = 0$வில் சார்பு வகையிட இயலாது

(v) உண்மை , $c = \frac{7}{3}$

(2) 16

பயிற்சி 5.5

(1) $1 + \frac{2x}{\lfloor 1} + \frac{(2x)^2}{\lfloor 2} + \frac{(2x)^3}{\lfloor 3} + \ldots$ (2) $1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + \ldots$

(3) $1 - x + x^2 + \ldots$ (4) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$

பயிற்சி 5.6

(1) $-\pi$	(2) 2	(3) 1	(4) $n2^{n-1}$	(5) 2
(6) -2	(7) 0	(8) 2	(9) 0	(10) e
(11) 1	(12) 1	(13) 1		

பயிற்சி 5.7

(3) (i) ஏறும் (ii) திட்டமாக ஏறும் (iii) திட்டமாக இறங்கும்

(iv) திட்டமாக ஏறும் (v) ஏறும்

(5) (i) $(-\infty, -1/2]$ல் ஏறும் மற்றும் $[-1/2, \infty)$ல் இறங்கும்

(ii) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ல் ஏறும் மற்றும் $[-1, 1]$ல் இறங்கும்

(iii) Rல் திட்டமாக ஏறும்

(iv) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ல் இறங்கும் மற்றும் $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ல் ஏறும்

(v) $[0, \pi]$ல் ஏறும்

(vi) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ல் ஏறும் மற்றும் $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ல் இறங்கும்

பயிற்சி 5.9

	மாறுநிலை எண்கள்	நிலைப் புள்ளிகள்
(1) (i)	$x = \frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
(ii)	$x = \pm 1$	$(1, -1)$ மற்றும் $(-1, 3)$
(iii)	$x = 0, 4, \frac{8}{7}$	$(4, 0)$ மற்றும் $\left(\frac{8}{7}, \left(\frac{8}{7}\right)^{4/5}\left(\frac{20}{7}\right)^2\right)$
(iv)	$x = 0, -2$	$(0, 1)$ மற்றும் $\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$

	(v)	$\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$	$(0, 0), \left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 1\right), (\pi, 0)$
	(vi)	$\theta = \pi$	(π, π)

		மீப்பெரு பெருமம்	***மீச்சிறு சிறுமம்***
(2)	(i)	5	1
	(ii)	2	-7
	(iii)	66	-15
	(iv)	3	$\sqrt{5}$
	(v)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
	(vi)	$\sqrt{2}$	1
	(vii)	$\pi + 2$	$-\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$

		இடஞ்சார்ந்த பெருமம்	***இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்***
(3)	(i)	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$
	(ii)	12	$\frac{-19}{27}$
	(iii)	0	-9
	(iv)	இல்லை	-1
	(v)	1	இல்லை
	(vi)	இடஞ்சார்ந்த பெருமம் மற்றும் சிறுமம் இல்லை	

பயிற்சி 5.10

(1) 50, 50 (2) 10, 10 (5) $(\sqrt{2}\, r, \sqrt{2}\, r)$ (6) $20\sqrt{5}$

பயிற்சி 5.11

	மேல்நோக்கி குழிவு	***மேல்நோக்கி குவிவு***	***வளைவு மாற்றுப் புள்ளி***
(1)	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$	$(1, 0)$
(2)	R	–	இல்லை
(3)	$\left(-\frac{5}{6}, \infty\right)$	$\left(-\infty, -\frac{5}{6}\right)$	$-\frac{5}{6}, \frac{305}{54}$
(4)	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-1, 1)$	$(1, -5), (-1, -5)$

(5) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

(6) $(-2, 1)$ $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ $(1, 9), (-2, 48)$

பயிற்சி 6.1

(1) (i) $dy = 5x^4 dx$ (ii) $dy = \frac{1}{4} x^{-3/4} dx$ (iii) $dy = \frac{x(2x^2+1)}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\, dx$

(iv) $dy = \left[\frac{7}{(2x+3)^2}\right] dx$ (v) $dy = 2\cos 2x\, dx$ (vi) $dy = (x \sec^2 x + \tan x)\, dx$

(2) (i) $dy = -2x\, dx$; $dy = -5$ (ii) $dy = (4x^3 - 6x + 1)\, dx$; $dy = 2.1$

(iii) $dy = 6x(x^2+5)^2 dx$; $dy = 10.8$ (iv) $dy = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\, dx$; $dy = -0.01$

(v) $dy = -\sin x\, dx$; $dy = -0.025$

(3) (i) 6.008 (தோராயமாக) (ii) 0.099 (தோராயமாக) (iii) 2.0116 (தோராயமாக)

(iv) 58.24 (தோராயமாக)

(4) (i) 270 கன செ.மீ. (ii) 36 செ.மீ.^{2} (5) (i) $0.96\,\pi$ செ.மீ^{2} (ii) 0.001667

பயிற்சி 6.2

எண்	காணப்படும் பகுத	சமச்சீர்	தொலைத் தொடுகோடுகள்	கண்ணிகள்
2	$-1 \le x \le 1$	x-அச்சு, y-அச்சு மற்றும் ஆதி	இல்லை	-1 மற்றும் 1க்கு இடையே 2 கண்ணிகள்
3	$-2 < x \le 6$	x- அச்சு	$x = -2$	0 மற்றும் 6க்கு இடையே 1 கண்ணி
4	$x \le 1$	x- அச்சு	இல்லை	0 மற்றும் 1க்கு இடையே 1 கண்ணி
5	$x = b$ மற்றும் $x \ge a$	x- அச்சு	இல்லை	இல்லை

பயிற்சி 6.3

(1) (i) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + 2y$ (ii) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^3 + 2y^3}{x^3y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{(y^3 + 2x^3)}{x^2\, y^3}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-6y}{x^4}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$

(iii) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \cos 3x \cos 4y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -4 \sin 3x \sin 4y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -9 \sin 3x \cos 4y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -16 \sin 3x \cos 4y$

(iv) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

(3) (i) $5t^4 e^{t^5}$ (ii) $\frac{2\,(e^{2t} - e^{-2t})}{(e^{2t} + e^{-2t})}$ (iii) $-\sin t$

(iv) $2\cos^2 t$

(4) (i) $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{2}{r}$; $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$ (ii) $\frac{\partial w}{\partial u} = 4u\,(u^2 + v^2)$; $\frac{\partial w}{\partial v} = 4v(u^2 + v^2)$

(iii) $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{2u}{\sqrt{1 - (u^2 - v^2)^2}}$; $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{-2v}{\sqrt{1 - (u^2 - v^2)^2}}$

பயிற்சி 7.1

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{9}{4} \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (4) $\frac{1}{4}$

(5) $\frac{\pi}{6}$ (6) $\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{1}{3}$ (7) $\log\left(\frac{16}{15}\right)$ (8) $\frac{1}{64}\pi^4$

(9) $\frac{2}{3}$ (10) $e - 2$ (11) $\frac{1}{10}(e^{3\pi/2} - 3)$ (12) $\frac{1}{2}[1 - e^{-\pi/2}]$

பயிற்சி 7.2

(1) 0 (2) 0 (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{4}{3}$ (5) $\frac{2}{3}$

(6) 0 (7) 0 (8) $\frac{3}{2}$ (9) $\frac{1}{132}$ (10) $\frac{\pi}{12}$

பயிற்சி 7.3

(2) (i) $-\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x$

(ii) $\frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x$

(3) (i) $\frac{5\pi}{32}$ (ii) $\frac{128}{315}$ (4) (i) $\frac{35\pi}{512}$ (ii) $\frac{16}{105}$ (5) (i) $\frac{-3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$ (ii) $2^7 . \underline{|6}$

பயிற்சி 7.4

(1) (i) 4 (ii) 4 (2) (i) 57 (ii) 16 (3) 4

(4) $\frac{55}{27}$ (5) $8\left(4 - \sqrt{2}\right)$ (6) $\frac{8a^2}{3}$

(7) $\frac{4\sqrt{5}}{3}\left[\sqrt{5} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{2}{3}\right]$ (8) 9 (9) 4

(10) πa^2 (11) $\frac{178\pi}{15}$ (12) $\frac{\pi a^3}{24}$

(13) $\frac{3}{5}\pi$ (14) $\frac{4\pi\, ab^2}{3}$

(15) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (16) π

பயிற்சி 7.5

(1) $2\pi a$ (2) $4a$ (3) $\frac{8\pi a^2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

பயிற்சி 8.1

		வரிசை	படி		வரிசை	படி
(1)	(i)	1	1	(vi)	2	3
	(ii)	1	1	(vii)	2	1
	(iii)	2	1	(viii)	2	2
	(iv)	2	2	(ix)	1	3
	(v)	3	3	(x)	1	1

(2) (i) $y = 2xy'$ (ii) $x^2 y'' - 2xy' + 2y - 2c = 0$

(iii) $xy' + y = 0$ (iv) $x\left[(y')^2 + yy''\right] - yy' = 0$

(v) $y'' + 3y' - 10y = 0$ (vi) $y'' = 6y' - 9y$

(vii) $y'' = 6y' - 13y$ (viii) $y = e^{(y'/y)x}$ (ix) $y'' - 4y' + 13y = 0$

(3) (i) $yy' = (y')^2 x + a$ (ii) $y' = m$ (iii) $y'' = 0$ (4) $y^2\left[(y')^2 + 1\right] = 1$

பயிற்சி 8.2

(1) $y + \frac{\sin 2y}{2} + \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 3x}{3} = c$ (2) $\log y + e^{\tan x} = c$

(3) $x = cy\, e^{\left(\frac{x+y}{xy}\right)}$ (4) $e^x(x^2 - 2x + 2) + \log y = c$

(5) $\sin^{-1}\left(\frac{y-4}{5}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right) = c$ (6) $\tan(x+y) - \sec(x+y) = x + c$

(7) $y - \tan^{-1}(x+y) = c$ (8) $e^{xy} = x + 1$

பயிற்சி 8.3

(1) $(y - 2x) = cx^2y$ (2) $y^3 = cx^2 e^{-x/y}$ (3) $y = ce^{x^2/2y^2}$

(4) $2y = x(x + y)$ (5) $x^2(x^2 + 4y^2)^3 = c$ (6) $y = x \log x$

பயிற்சி 8.4

(1) $e^x(y - x + 1) = c$ (2) $y(x^2 + 1)^2 - x = c$

(3) $xe^{\tan^{-1}y} = e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y - 1) + c$ (4) $y(1 + x^2) = \sin x + c$

(5) $2xy + \cos x^2 = c$ (6) $y = 1 + ce^{-x^2/2}$

(7) $xe^y = \tan y + c$ (8) $x = y - a^2 + ce^{-y/a^2}$

பயிற்சி 8.5

(1) $y = Ae^{-4x} + Be^{-3x} + \frac{e^{2x}}{30}$ (2) $y = e^{2x}[A\cos 3x + B\sin 3x] + \frac{e^{-3x}}{34}$

(3) $y = (Ax + B)e^{-7x} + \frac{x^2}{2}e^{-7x} + \frac{4}{49}$ (4) $y = Ae^{12x} + Be^x + \frac{e^{-2x}}{42} - \frac{5}{11}xe^x$

(5) $y = 2[\cos x - \sin x]$ (6) $y = e^x[2 - 3e^x + e^{2x}]$

(7) $y = Ae^x + Be^{-4x} - \frac{1}{4}\left[x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{13}{8}\right]$

(8) $y = Ae^{3x} + Be^{-x} + \frac{1}{130}[4\cos 2x - 7\sin 2x]$

(9) $y = (A + Bx) + \sin 3x$ (10) $y = (A + Bx)e^{3x} + \left(\frac{x}{9} + \frac{2}{27}\right) + e^{2x}$

(11) $y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x$

(12) $y = \left[C\cos\sqrt{5}\,x + D\sin\sqrt{5}\,x\right] + \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cos 2x$

(13) $y = e^{-x}\left[C\cos\sqrt{2}\,x + D\sin\sqrt{2}\,x\right] - \frac{1}{17}[4\cos 2x + \sin 2x]$

(14) $y = Ae^{-x} + Be^{-x/3} + \frac{3}{2} xe^{-x/3}$

பயிற்சி 8.6

(1) $A = 0.9025\, A_0$ (2) 17 ஆண்டுகள்(தோராயமாக) (3) $38.82°\, C$

(4) 197600 (5) 136 நாட்கள்

பயிற்சி 9.1

கூற்றுகள் : (1), (2), (3), (5), (6), (10) ; மற்றவை கூற்றுகள் அல்ல

(11) T (12) T (13) T (14) F (15) T

(16) F (17) F (18) T (19) F (20) F

(21) (i) ஆனந்த் செய்தித்தாள் படிக்கிறான் மற்றும் கிரிக்கெட் விளையாடுகிறான்.
ஆனந்த் செய்தித்தாள் படிக்கிறான் அல்லது கிரிக்கெட் விளையாடுகிறான்.

(ii) எனக்கு டீயும் ஐஸ்கிரீமும் பிடிக்கும்.
எனக்கு டீ அல்லது ஐஸ்கிரீம் பிடிக்கும்.

(22) (i) $p \vee q$: கமலா பள்ளிக்குச் செல்கிறாள் அல்லது வகுப்பில் இருபது மாணவர்கள் உள்ளனர்.

(ii) $p \wedge q$: கமலா பள்ளிக்குச் செல்கிறாள் மற்றும் வகுப்பில் இருபது மாணவர்கள் உள்ளனர்.

(iii) கமலா பள்ளிக்குச் செல்லவில்லை.

(iv) வகுப்பில் இருபது மாணவர்கள் உள்ளனர் என்பது தவறு.

(v) கமலா பள்ளிக்குச் செல்லவில்லை அல்லது வகுப்பில் இருபது மாணவர்கள் உள்ளனர்.

(23) (i) $p \wedge q$ (ii) $p \vee q$ (iii) $\sim p$ (iv) $p \wedge q$ (v) $\sim p$

(24) சீதாவுக்கு படிப்பதும் விளையாடுவதும் பிடிக்காது.

(25) (i) $\sqrt{5}$ ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல.

(ii) மணி ஒழுங்கற்றவர் அல்லது கடுமையாக உழைக்க மாட்டார்.

(iii) இப்படம் நன்றாகவும் இல்லை அழகாகவும் இல்லை.

பயிற்சி 9.2

(1) $p \vee (\sim q)$இன் மெய் அட்டவணை

p	q	$\sim q$	$p \vee (\sim q)$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

(2) $(\sim p) \wedge (\sim q)$-ன் மெய் அட்டவணை

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(3) $\sim (p \vee q)$-ன் மெய் அட்டவணை

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

(4) $(p \vee q) \vee (\sim p)$-ன் மெய் அட்டவணை

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \vee (\sim p)$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

(5) $(p \wedge q) \vee (\sim q)$-ன் மெய் அட்டவணை

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$(p \wedge q) \vee (\sim q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	F	F
F	F	F	T	T

(6) $\sim (p \vee (\sim q))$-ன் மெய் அட்டவணை

p	q	$\sim q$	$p \vee (\sim q)$	$\sim (p \vee (\sim q))$
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

(7) $(p \wedge q) \vee (\sim (p \wedge q))$-ன் மெய் அட்டவணை

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$(p \wedge q) \vee (\sim (p \wedge q))$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

(8) $(p \wedge q) \wedge (\sim q)$-ன் மெய் அட்டவணை

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$(p \wedge q) \wedge (\sim q)$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	F	F	F
F	F	F	T	F

(9) $(p \vee q) \vee r$-ன் மெய் அட்டவணை

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

(10) $(p \wedge q) \vee r$-ன் மெய் அட்டவணை

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

பயிற்சி 9.3

(1) (i) $((\sim p) \wedge q) \wedge p$ முரண்பாடு

(ii) $(p \vee q) \vee (\sim (p \vee q))$ மெய்மை

(iii) $(p \wedge (\sim q)) \vee ((\sim p) \vee q)$ மெய்மை

(iv) $q \vee (p \vee (\sim q))$ மெய்மை

(v) $(p \wedge (\sim p)) \wedge ((\sim q) \wedge p))$ முரண்பாடு

பயிற்சி 9.4

(1) பரிமாற்று விதியைப் பூர்த்தி செய்யாது. ஆனால் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.

(2) ஆம்

(10) 0([1]) = 1, 0 ([2]) = 4, 0([3]) = 4, 0([4]) = 2

பயிற்சி 10.1

(1)

X	0	1	2	3
$p\ (X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

(2)

X	0	1	2
$p\ (X = x)$	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

(3)

X	0	1	2
$p\ (X = x)$	$\frac{12}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

(4) (i) $\frac{1}{81}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{11}{27}$ (6) (i) 20 (ii) $\frac{13}{16}$

(7) (i) $\alpha\ \beta$ (ii) $e^{-\beta(10^{\alpha})}$

(8) $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$ (i) 0.3125 (ii) 0.25 (iii) 0.4375

(9) $c = a$ (10) (i) $\frac{1}{2\pi}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{1}{2}$

பயிற்சி 10.2

(1) சராசரி = 1, பரவற்படி = $\frac{1}{2}$ (2) $E(X) = 3.5$

(3) $E(X) = -15$ (4) சராசரி = $\frac{2}{13}$, பரவற்படி = $\frac{24}{169}$

(5) $E(X) = -1.25$

(6) சராசரி = 6.4 , பரவற்படி = 16.24

(7) (i) சராசரி = 0, பரவற்படி = 48 (ii) சராசரி = $\frac{1}{\alpha}$, பரவற்படி = $\frac{1}{\alpha^2}$

(iii) சராசரி = 2, பரவற்படி = 2

பயிற்சி 10.3

(1) சாத்தியமில்லை. ஏனெனில் ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0விற்கும் 1க்கும் இடையில் மட்டுமே அமைய வேண்டும்.

(2) சராசரி = 40 ; பரவற்படி = $\frac{80}{3}$

(3) சராசரி = 450, திட்ட விலக்கம் = $3\sqrt{5}$

(4) (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{11}{16}$ (iii) $\frac{11}{16}$ (5) $\frac{2048}{5^5}$ (6) $\frac{5^9}{6^{10}}(15)$

பயிற்சி 10.4

(1) (i) 0.4331 (ii) 0.5368 (2) (i) 0.1952 (ii) 0.5669

(3) (i) $45 \times \frac{4^8}{5^{10}}$ (ii) 0.2706 (4) (i) 0.0838 (ii) 0.9598

(5) (i) தோராயமாக 50 ஓட்டுனர்கள் (ii) தோராயமாக 353 ஓட்டுனர்கள்

பயிற்சி 10.5

(1) (i) 0.9772 (ii) 0.5 (iii) 0.9104 (iv) 0.8413 (v) 0.2417

(2) (i) 0.67 (ii) – 0.52 மற்றும் 0.52 (iii) – 1.04

(3) 0.0749 (4) 4886 சோடிகள்

(5) (i) 291 நபர்கள் (தோராயமாக) (ii) 6 நபர்கள் (தோராயமாக)

(6) 72.19 அங்குலம் (7) 640 மாணவர்கள் (8) $c = \frac{e^{-9/4}}{\sqrt{\pi}}$, $\mu = \frac{3}{2}$, $\sigma^2 = \frac{1}{2}$

குறிக்கோள் வினாக்களுக்கான விடைகள்

Q.No	Key	Q.No	Key	Q.No	Key	Q.No	Key	Q.No	Key
1	4	31	2	61	2	91	2	121	2
2	2	32	4	62	2	92	4	122	1
3	3	33	1	63	1	93	2	123	3
4	2	34	1	64	4	94	3	124	2
5	1	35	3	65	2	95	2	125	3
6	3	36	2	66	4	96	1	126	3
7	4	37	1	67	1	97	2	127	4
8	2	38	2	68	2	98	3	128	2
9	3	39	3	69	3	99	4	129	2
10	4	40	4	70	2	100	3	130	2
11	1	41	4	71	2	101	1	131	1
12	2	42	1	72	3	102	2	132	2
13	2	43	4	73	3	103	3	133	4
14	1	44	3	74	4	104	4	134	1
15	1	45	1	75	4	105	4	135	2
16	4	46	3	76	1	106	1	136	1
17	2	47	4	77	1	107	3	137	4
18	1	48	2	78	1	108	2	138	3
19	1	49	3	79	2	109	3	139	1
20	2	50	1	80	4	110	3	140	4
21	3	51	1	81	3	111	4	141	3
22	1	52	2	82	2	112	4	142	1
23	1	53	3	83	2	113	3	143	2
24	2	54	2	84	1	114	4	144	2
25	2	55	3	85	2	115	3	145	2
26	3	56	1	86	2	116	1	146	3
27	2	57	1	87	3	117	1	147	1
28	4	58	4	88	4	118	2	148	4
29	2	59	4	89	2	119	4	149	3
30	1	60	2	90	1	120	2	150	3

REFERENCE BOOKS

(1) Calculus and Analytical Geometry (International student edition)
George B.Thomas and Ross L. Finney (ninth edition) Addison-Wesley.

(2) Calculus and Analytical Geometry
Philip Gillett
D.C. Health and Company

(3) Calculus with Analytic Geometry (third edition)
Johnson & Kiokmeister

(4) Calculus with Maple Labs
Wieslaw Krawcewiez and Bindhya Chal Rai,
Narosa Pub. House

(5) Differential and Integral Calculus :
Schaum's Outline Series
Frank Ayres Jr., Elliott Mendelson

(6) Analytic Geometry with Calculus
Robert C. Yates, University of South Florida
Printice – Hall Inc.

(7) Calculus for Scientists and Engineers. An analytical approach
K.D. Joshi

(8) Calculus and Analytic Geometry (Fourth edition)
George B. Thomas Jr., Addison Wesley Pub. Co.

(9) Calculus : An Historical Approach
W.M. Priestly (Springer)

(10) Inside Calculus
George R-Exner (Springer)

(11) Calculus with Analytic Geometry (Second edition, International edition)
George F. Simmons, The Mcgraw Hill

(12) Mathematical Hand Book Higher Mathematics
M. Vygodsky, MIR Publishers

(13) The Calculus with Analytic Geometry
Louis Leithold, University of Southern California
Harper & Row Publishers

(14) College Mathematics (second edition), Schaum's Outline Series
Frank Ayres Jr., Phillip A. Schmidt

(15) Differential Equation
Raisinghania

(16) Methods of Real Analysis
Richard R. Goldberg
Oxford & IBH Publishing Company Pvt. Ltd.

(17) Differential and Integral Calculus I
Piskunov, MIR Publishers

(18) Simplified Course in Integral Calculus
Raisinghania, H.C. Saxena, H.K. Dass

(19) Advanced Engineering Mathematics
H.K. Dass, University of Hull, England

(20) Calculus with Analytic Geometry (second edition)
Howard Anton, Drexel University

(21) Simplified Course in Statistics
H.C. Saxena, H.K. Dass, Raisinghania

(22) Mathematical Statistics
J.N. Kapur, H.C. Saxena

(23) Probability and Statistics (fifth edition)
Jay L. Devore, Thomas Duxbury

(24) Discrete Mathematical Structures with Applications to Computer Science
J.P. Tremblay & R. Manohar

(25) Topics in Algebra
I.N. Herstein

(26) Matrices – Schaum's Outline Series
Frank Ayres

(27) Matrices – A.R. Vasishtha

(28) A Text Book of Modern Algebra
R. Balakrishnan, N. Ramabhadran
Vikash Publishing House

(29) Complex Variables : Schaum's Outline Series
M.R. Spiegel

(30) Vector Analysis
M.R. Spiegel